

43. Sei die Raumkurve $\mathcal{C} = \{(x(s), y(s), z(s)) \mid s \in \mathbb{R}\}$ mit

$$x(s) = (2 + \cos(2s)) \cos(3s)$$


$$y(s) = (2 + \cos(2s)) \sin(3s)$$

$$z(s) = \sin(2s)$$

gegeben. Finden Sie ein Ideal $I \subseteq \mathbb{R}[x, y, z]$ mit $\mathcal{C} = Z(I)$.

44. Es sei I ein Ideal von $K[x_1, \dots, x_n]$. Dann heißt $I_l := I \cap K[x_1, \dots, x_l]$ das l -te Eliminationsideal von I . Weiters heiße eine Termordnung "Eliminationstermordnung" bezuglich x_{l+1}, \dots, x_n , wenn jedes Monom, das nur x_1, \dots, x_l enthält, kleiner ist (bezuglich dieser Termordnung) als alle Monome, die nicht nur diese Variablen enthalten.

1. (1 Punkt) Man begründe, warum Lex ($x_1 < x_2 \dots$) eine Eliminationstermordnung ist und gebe ein weiteres Beispiel an (es genügt ein einfacher Spezialfall).
2. (2 Punkte) Beweise folgende Aussage: ist \succ eine Eliminationstermordnung bezuglich x_{l+1}, \dots, x_n , I ein Ideal von $K[x_1, \dots, x_n]$ und G die reduzierte Grbner-Basis von I bezuglich \succ , dann ist $G \cap K[x_1, \dots, x_l]$ eine reduzierte Grbner-Basis von I_l .

45.  Wir zeigen, wie mittels Grbner-Basen die 3-Färbbarkeit eines (ungerichteten) Graphen $G = (V, E)$ entschieden werden kann (d.h. die Frage, ob es eine Funktion $f : V \rightarrow \{\text{rot, gelb, grün}\}$ mit $f(i) \neq f(j)$ für alle $\{i, j\} \in E$ gibt).

Jedem Knoten $i \in V$ sei die Variable X_i zugeordnet. Betrachte das Gleichungssystem

$$X_i^3 - 1 = 0, \text{ für alle } i \in V$$

$$X_i^2 + X_i X_j + X_j^2 = 0, \text{ für alle } \{i, j\} \in E.$$

- (a) Zeigen Sie, dass die Lösungen des Gleichungssystems genau den zulässigen 3-Färbungen des Graphen entsprechen.
- (b) Demonstrieren Sie die Vorgehensweise an einem selbstgewählten interessanten Beispiel (d.h. der Graph sollte 3-färbbar sein, man sollte ihm das aber nur schwer mit freiem Auge ansehen können.)
- (c) Gehen Sie kurz darauf ein, wie man das Verfahren ändern muss, um 4-Färbbarkeit zu entscheiden.
- (d) Warum ist es nicht unbedingt ein Grund zur Freude, dass man mit Grbner-Basen 3-Färbbarkeit entscheiden kann.