19. Zeigen Sie:

(a) Wenn $<$ eine Monomordnung ist, dann ist auch $<_d$ eine Monomordnung.

(b) Es gibt nur eine zulässige Monomordnung auf $K[x]$.

20. Zeigen Sie:

(a) Es gibt keine zulässige Monomordnung auf $K[x,y]$, in der $x^6y^9 > x^4y^{12}$ und $x^6y^9 > x^8y^7$ gilt.

(b) Sei $f = 2x^4y^5 + 3x^5y^2 + x^3y^9 \in \mathbb{Q}[x,y]$. Es gibt keine zulässige Monomordnung, in der $\mathrm{lm}(f) = x^4y^5$ gilt.

21. Es sei I ein Ideal von $K[x_1,\ldots,x_n]$. Darüber hinaus seien zwei Termordnungen $\prec_1$ und $\prec_2$ gegeben. Zeigen Sie: Ist $\{g_1,\ldots,g_t\}$ eine Gröbner-Basis von I bezüglich $\prec_1$, und gilt $lt_{\prec_1}(g_i) = lt_{\prec_2}(g_i)$ für $i = 1,\ldots,t$, dann ist $\{g_1,\ldots,g_t\}$ auch eine Gröbner-Basis bezüglich $\prec_2$.

22. Sei A eine reguläre $(n \times n)$-Matrix mit nichtnegativen reellen Einträgen, und sei auf den Monomen in $K[x_1,\ldots,x_n]$ eine Relation wie folgt definiert:

$$x_1^{a_1}\cdots x_n^{a_n} <_A x_1^{b_1}\cdots x_n^{b_n}$$

gilt genau dann, wenn

$$A \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} <_{\mathrm{lex}} A \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Hier bedeutet $(a_1,\ldots,a_n) <_{\mathrm{lex}} (b_1,\ldots,b_n)$ folgendes: Es gibt ein $k \in \{1,\ldots,n\}$, sodass $a_i = b_i$ für $1 \le i < k$ und $a_k < b_k$.

Zeigen Sie, dass $<_A$ eine zulässige Monomordnung ist, und bestimmen Sie Matrizen A, sodass $<_A$ den in der Vorlesung vorgestellten Monomordnungen entspricht.

23. Sei $I \trianglelefteq K[x_1,\ldots,x_n]$ ein Ideal, $l(I)$ das von den Leitmonomen erzeugte Ideal, und

$$S := \{f \in K[x_1,\ldots,x_n] \mid \mathrm{Supp}\, f \cap l(I) = \emptyset\}.$$

Zeigen Sie, dass S ein vollständiges Restsystem modulo $l(I)$ und modulo I ist.