24. Sei $R = \mathbb{Z}/(2010\mathbb{Z})$ der Restklassenring modulo 2010.

1. Wieviele Syzygien hat $(1,1,1) \in R^3$?
2. Wieviele Syzygien hat $(1,1,2) \in R^3$?

25. Man bestimme für die folgenden Ideale A von $\mathbb{Q}(x,y)$ das durch die Leitkoeffizienten (bezüglich lexikographischer Monomordnung mit $x > y$) erzeugte Ideal $l(A)$. Stellt die angegebene Erzeugermenge eine Gröbner-Basis dar?

- $A = (x^2 - xy, x^2y)$,
- $A = (xy + y^2, x^2 - y)$,
- $A = (x^2 - 2xy, y - 3)$.

26. Berechnen Sie (von Hand) Gröbner-Basen des Ideals $(y^2+x, yz+1, xy)$ von $\mathbb{Q}(x,y,z)$ bezüglich der lexikographischen und der Grad-lexikographischen Monomordnung mit $x > y > z$.

27. Es sei $F = \{f_1, \ldots, f_s\}$ eine Menge von Polynomen aus $K[x]$, dem Polynomring in einer Variablen, und es sei $d = \mathrm{ggT}(f_1, \ldots, f_s)$. Zeige: F ist genau dann eine Gröbner-Basis, wenn $cd \in F$ für irgendein $c \in K \setminus \{0\}$ gilt.

28. Implementieren Sie Division mit Rest durch eine Liste von Polynomen: Gegeben g, f_1, …, $f_k \in K[x_1, \ldots, x_n]$, gesucht ist $\mathrm{rest}(g; f_1, \ldots, f_k)$.

29. ☠ Implementieren Sie den Buchberger-Algorithmus zum Finden einer Gröbner-Basis eines Ideals $I = (f_1, \ldots, f_k)$ von $K[x_1, \ldots, x_n]$.