30. Bestimmen Sie alle Syzygien von

a) $(x^4y^2, x^3z^5, x^6z) \in \mathbb{R}[x,y,z]^3$

b) $(x_1^5x_2^2, x_2^3x_3, x_4^3x_1) \in \mathbb{R}[x,y,z]^3$

31. Implementieren Sie eine Funktion, die ein Erzeugendensystem der Syzygien einer gegebenen endlichen Menge von Monomen bestimmt.

32. Sei $A = (a_{ij}) \in K^{m\times n}$ eine Matrix in Zeilenstufenform. Zeigen Sie, dass die Polynome

$$f_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j \in K[X_1,\dots,X_n], \quad 1 \le i \le m$$

eine Gröbner-Basis des von ihnen erzeugten Ideals (bezüglich jeder beliebigen Monomordnung mit $X_1 > X_2 > \ldots > X_n$) bilden.

Daher: Das Bestimmen einer Gröbner-Basis eines von linearen Polynomen erzeugten Ideals ist äquivalent zum Bestimmen einer Zeilenstufenform.

33. Sei $k \subseteq K$ eine Körpererweiterung. Zeigen Sie:

a) Die Monomordnungen auf $k[X_1,\dots,X_n]$ können mit denen auf $K[X_1,\dots,X_n]$ identifiziert werden.

b) Sei $F = \{f_1,\dots,f_m\} \subset k[X_1,\dots,X_n]$ eine Gröbner-Basis eines Ideals $I \trianglelefteq k[X_1,\dots,X_n]$. Dann ist F auch eine Gröbner-Basis des von I erzeugten Ideals von $K[X_1,\dots,X_n]$ (bezüglich derselben Monomordnung).

34. Sei I ein Ideal von $K[X_1,\dots,X_n]$ und $\{f_1,\dots,f_m\}$ eine Gröbner-Basis von I. Zeigen Sie, dass

$$\{X + I \mid X \text{ Monom und kein } \operatorname{lm}(f_i) \text{ teilt } X\}$$

eine Basis des K-Vektorraums $K[X_1,\dots,X_n]/I$ ist.