

35. Zeigen Sie, dass die Menge $\{2x^3y^2 - 3xy^4, x^3y - 3xy^2, 3y^4 - 6y^3\}$ eine Gröbner-Basis bezüglich Lex ($x \succ y$) ist und bestimmen Sie daraus eine reduzierte Gröbner-Basis.

36. Seien ein Ideal I von $K[x_1, \dots, x_n]$ und zwei Termordnungen $<_1, <_2$ auf $K[x_1, \dots, x_n]$ gegeben. Sei $l_1(I)$ (bzw. $l_2(I)$) das Leitmonomideal von I bezüglich $<_1$ (bzw. $<_2$) und $\{g_1, \dots, g_k\}$ die reduzierte Gröbner-Basis von I bezüglich $<_1$. Setze $m_i := \text{lm}_{<_1}(g_i)$, dann ist $l_2(I) = l_1(I)$ genau dann, wenn $\{g_1, \dots, g_k\}$ auch bezüglich $<_2$ die reduzierte Gröbner-Basis von I ist und m_i auch bezüglich $<_2$ das Leitmonom von g_i ist.

37. Seien $f_1, \dots, f_m \in K[x_1, \dots, x_n]$ gegeben. Implementieren Sie (unter Verwendung früherer Beispiele) eine Funktion, die eine reduzierte Gröbner-Basis des Ideals (f_1, \dots, f_m) bezüglich einer vorgegebenen Monomordnung bestimmt. (Zumindest lex und deg lex sollten unterstützt werden.)

38. ☠

(a) Finden (und beweisen) Sie eine verallgemeinerte Version des schwachen Nullstellensatzes, die nicht voraussetzt, dass der Körper K algebraisch abgeschlossen ist.

(b) Verwenden Sie (a), um eine verallgemeinerte Version des (ringtheoretischen) starken Nullstellensatzes zu zeigen.

39. Sei K ein unendlicher Körper und $f \in K[x_1, \dots, x_n]$, sodass $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ für alle $a_1, \dots, a_n \in K$. Zeigen Sie, dass dann bereits $f = 0$ gilt. (Hinweis: Induktion und bekannte Tatsachen über univariate Polynome.)