

Bei allen Beispielen dürfen Computer verwendet werden, inklusive Funktionen, die in bisherigen Übungsbeispielen vorgekommen sind (insb. bestimmen von Gröbner-Basen). Befehle die das jeweilige Beispiel trivial machen würden, wie z.B.: `Solve` oder `RootReduce` in Mathematica, sind verboten.

40.

(a) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - 1 &= 0, \\4xy - \sqrt{3} &= 0.\end{aligned}$$

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x, y, z) = (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 1)z + z^3 + x + y$ keine reellen lokalen Extrema besitzt.

41. Es gelte

$$\begin{aligned}a + b + c &= 1, \\a^2 + b^2 + c^2 &= 2, \\a^3 + b^3 + c^3 &= 3.\end{aligned}$$

Bestimme $a^4 + b^4 + c^4$, ohne a, b, c explizit zu berechnen!

42.

(a) Berechnen Sie das Minimalpolynom (über \mathbb{Q}) von $\sqrt{3} + \sqrt{7} + \sqrt{11}$.

(b) Berechnen Sie das Minimalpolynom (über \mathbb{Q}) von $\frac{\alpha^2+2}{\alpha+3}$, wobei α eine Nullstelle von $x^3 - x - 2$ ist!