2008-10-07

Logik / Berechenbarkeit

I Aussagenlogik

Aussagenlogische Formeln: Ausdrücke der Gestalt

$A_1 \wedge A_2$, $A_2 \vee A_3$, $A_1 \to (A_2 \vee A_3)$ etc.

Alphabet $\underbrace{\{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}}_{\text{abzählbar } \infty \text{ viele aussagenlog. Variablen}} \cup \underbrace{\{\neg, \vee, \wedge, \to, \Leftrightarrow, \underset{\text{NAND}}{|}\}}_{\text{Junktoren}} \cup \underbrace{\{(,)\}}_{\text{Klammern}} = \mathcal{B}$

$\mathcal{B}^* = \{$Wörter mit Buchstaben aus $\mathcal{B}\}$

Wort ist string endl. Länge, leeres Wort ε zugelassen.

$\mathcal{A}$ Sprache der Aussagenlogik def. als Teilmenge von $\mathcal{B}^*$ induktiv durch

1) $\forall i \quad A_i \in \mathcal{A}$
2) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow (\neg A), (A \wedge B), (A \vee B), (A \to B), (A \Leftrightarrow B), (A|B) \in \mathcal{A}$

Was ist mit dieser induktiven Def. gemeint:

allgemeine Teilmenge T einer Menge S induktiv definieren heißt: Angabe einer Liste von Relationen, wobei T def. als Durchschnitt aller Teilmengen von S, die bezüglich dieser Relationen abgeschlossen sind. Wenn $R \subseteq S \times \ldots \times S = S^n$ n-wertige Relation auf S, dann heißt $M \subseteq S$ abgeschlossen bzgl. R, wenn $\forall m_1, \ldots, m_n \in S$ mit $m_1, \ldots, m_{n-1} \in M$ und $(m_1, \ldots, m_{n-1}, m_n) \in R$ gilt: $m_n \in M$.

Am Bsp $\mathcal{A}$: $S = \mathcal{B}^*$, $\mathcal{A}$ def als Durchschnitt aller Teilmengen von $\mathcal{B}^*$ die abg. bzgl. folgender Relation sind:

1) $R_a \subseteq \mathcal{B}^*$: $w \in R_a \Leftrightarrow w \in \{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$

Abgeschlossenheit bzgl. 1-stelligen Relation heißt einfach, dass Elemente, die die Relation erfüllen in $\mathcal{A}$ sind.
($m_1, \ldots, m_{n-1} \in \mathcal{A}$, $(m_1, \ldots, m_n) \in R \Rightarrow m_n \in R$ im Fall $n=1$ gibt es keine $m_1, \ldots, m_{n-1}$ daher $m_1, \ldots, m_{n-1} \in \mathcal{A}$ „leer erfüllt")

2) $R_\neg = \{(B, (\neg B)) \mid B \in \mathcal{B}^*\}$ $R_\wedge = \{(A, B, (A \wedge B)) \mid A, B \in \mathcal{B}^*\}$
etc.

Umgangssprachliche Abkürzungen für aussagenlogische Formeln:
äußere Klammer weglassen:
$\neg A$ steht für $(\neg A)$, $A \vee B$ steht für $(A \vee B)$ etc.
Bindungsstärke:
$\neg$ bindet stärker als alle anderen Junktoren:
$\neg A \vee B$ steht für $(\neg A) \vee B$ [nicht für $\neg(A \vee B)$]
$\wedge, \vee$ binden stärker als $\Rightarrow, \Leftrightarrow$:
$A \wedge B \Rightarrow C$ steht für $((A \wedge B) \Rightarrow C)$

Umgangssprachliche Abkürzungen, keine Formeln $\in \mathcal{A}$, wenn man Formeln als formale Ausdrücke behandelt: vorher Klammern eintragen.

Andere Art die Sprache der Aussagenlogik zu definieren:
Postfix (Vorteil: keine Klammern, Nachteil: nicht so gut lesbar):
Definieren $\mathcal{A}_P$ als Teilmenge $\mathcal{B}^*$, $\mathcal{B} = \{A_i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, |\}$
durch:
1) $\forall i \in \mathbb{N}: A_i \in \mathcal{A}_P$
2) $A, B \in \mathcal{A}_P \Rightarrow A\neg,\ AB\wedge,\ AB\vee,\ AB\Rightarrow,\ AB\Leftrightarrow,\ AB| \in \mathcal{A}_P$

Wenn eine Menge M induktiv definiert ist, dann kann man Aussagen für jedes $m \in M$ beweisen, indem man eine Induktion entlang der induktiven Struktur (in der Def von M) führt.

dh. man zeigt:

1) für alle Elemente, die die 1-stelligen Rel. in der Def. von M erfüllen: diese Elemente erfüllen Aussage

2) $\forall$ $n>1$ stelligen Relationen in Def. von M: wenn $m_1, m_2, \dots, m_{n-1}$ jeweils die Aussage erfüllen und $(m_1, m_2 \dots, m_{n-1}, m_n) \in R$, dann erfüllt m_n die Aussage.

Andere Formulierung: damit alle $m \in M$ die Aussage X erfüllen, genügt es, zu zeigen: $\forall R$ Relation, die in der induktiven Def. von M vorkommen gilt: wenn $m_1, \dots, m_{n-1}$ X erfüllen und $(m_1, \dots, m_{n-1}, m_n) \in R$ dann erfüllt auch m_n Aussage X.
[Pkt 1 betreffend 1-stellige Rel. wird bei dieser Formulierung von Induktion auch erledigt, da für R 1-stellig die Aussage $m_1, \dots, m_{n-1}$ erfüllen X „leer erfüllt" ist und man Aussage X für jene m mit $m \in R$ ohne Vorbedingung zeigen muß].

Beweis (dass diese Art von Induktion funktioniert)

Sei $M \subseteq S$ induktiv def. N Menge der $s \in S$ für die Aussage X gilt. Angenommen dass $\forall R$ in Def von M gilt „$(m_1, \dots, m_n) \in R$ und $m_1, \dots, m_{n-1} \in N$ dann auch $m_n \in N$".

zz: $M \subseteq N$. Das ist klar, da $N \subseteq S$ und N bzgl. allen Rel. in Def. von M abgeschlossen ist, $M = \bigcap\limits_{L \text{ abg.}} L$

N kommt unter den Mengen L, also deren Durchschnitt M definiert ist, vor, also $N \supseteq M = \bigcap L$.

Ü: in jeder Formel $\in \mathcal{A}$ kommen gleich viele „(" wie „)" vor, in jedem nicht trivialen echten Anfangsabschnitt mehr „(".

Definition: Anfangsabschnitt eines Wortes $b_1 b_2 \dots b_n$ ist Ausdruck der Gestalt $b_1 b_2 \dots b_k$ für $k \leq n$.

Nichttrivial: $k > 0$ (dh. nicht das leere Wort ε)

Echt: $k<n$ (dh. nicht das ganze Wort)

Korollar des Ü-Bsp: kein echter Anfangsabschnitt einer aussagenlogischen Formel $\in \mathcal{A}$ (Version mit Klammern) ist selbst Formel der Aussagenlogik.

Proposition: jede Formel $\in \mathcal{A}$ erfüllt „eindeutige Lesbarkeit" in Bezug auf unsere induktive Def. von $\mathcal{A}$
dh. für jede aussagenlogische Formel F gilt genau einer der Fälle:

1) $F = A_i$ für ein $i \in \mathbb{N}$
2) $F = (\neg A)$ für ein $A \in \mathcal{A}$
3) $F = (A * B)$ für $A, B \in \mathcal{A}$ und $* \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, |\}$

und in Fall 1) i eindeutig bestimmt, im Fall 2) A eind. best. im Fall 3) sind $*$, A, B eind. best.

Beweis: Ü

Proposition: Sei $M \subseteq S$ induktiv definiert und erfülle eindeutige Lesbarkeit. Dann kann man Funktionen $f: M \to N$ (N bel. Menge) definieren, indem man

1) für alle $m \in M$, die eine 1-stellige Relation in def von M erfüllen einen Wert $f(m) \in N$ angibt und
2) für jede $n \geq 1$ stellige Relation in der induktiven Definition von M eine Vorschrift angibt, wie man für $m_1, \dots, m_n \in S$ mit $(m_1, \dots, m_n) \in R$ aus bekannten $f(m_1), \dots, f(m_{n-1})$ der Wert $f(m_n)$ berechnet.

Beispiel: Wahrheitsfunktionen für Formeln der Aussagenlogik aus Belegungen der aussagenlogischen Variable berechnet.

Definition: Eine Belegung ist Funktion $b : \{A_i \mid i \in I\} \to \{0,1\}$ wobei $I \subseteq \mathbb{N}$; vollständige Belegung wenn $I = \mathbb{N}$.

Den Junktoren ordnen wir folgende Funktionen zu:

$\phi_\neg : \{0,1\} \to \{0,1\} \qquad \phi_\neg(0) = 1 \;,\; \phi_\neg(1) = 0$

$\phi_\wedge : \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\} \qquad \phi_\wedge(1,1) = 1 \qquad \phi_\wedge(x,y) = 0 \quad (x,y) \neq (1,1)$

$\phi_\vee : \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\} \qquad \phi_\vee(x,y) = \begin{cases} 0 & (x,y) = (0,0) \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$

analog $\phi_\to(x,y) = \begin{cases} 0 & (x,y) = (1,0) \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$

$$\phi_\Leftrightarrow(x,y) = \begin{cases} 1 & x = y \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\phi_\mid(x,y) = \begin{cases} 0 & (x,y) = (1,1) \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

vollständige Belegung b zu Funktion $\bar{b} : \mathcal{A} \to \{0,1\}$ fortsetzen durch induktive Definition

1) Funktionswerte für aussagenlog. Variable durch b gegeben:
   für ein $i \in \mathbb{N}$: $\bar{b}(A_i) = b(A_i)$

2) für $F = (\neg A)$ mit $A \in \mathcal{A}$ sei $\bar{b}(F) = \phi_\neg(\bar{b}(A))$ und für $* \in \{\wedge, \vee, \to, \Leftrightarrow, \mid\}$ und $F = (A * B)$ $\bar{b}(F) := \phi_*(\bar{b}(A), \bar{b}(B))$