Definition: Eine Belegung ist Funktion $b: \{A_i \mid i \in I\} \to \{0,1\}$
wobei $I \subseteq \mathbb{N}$; vollständige Belegung wenn $I = \mathbb{N}$.

Den Junktoren ordnen wir folgende Funktionen zu:

$\phi_\neg : \{0,1\} \to \{0,1\}$ $\quad \phi_\neg(0) = 1$, $\phi_\neg(1) = 0$

$\phi_\wedge : \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$ $\quad \phi_\wedge(1,1) = 1$ $\quad \phi_\wedge(x,y) = 0$ $\quad (x,y) \neq (1,1)$

$\phi_\vee : \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$ $\quad \phi_\vee(x,y) = \begin{cases} 0 & (x,y) = (0,0) \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$

analog $\phi_\to(x,y) = \begin{cases} 0 & (x,y) = (1,0) \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$

$$\phi_\Leftrightarrow(x,y) = \begin{cases} 1 & x = y \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\phi_\mid(x,y) = \begin{cases} 0 & (x,y) = (1,1) \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

vollständige Belegung b zu Funktion $\bar{b} : \mathcal{A} \to \{0,1\}$ fortsetzen durch induktive Definition

1) Funktionswerte für aussagenlog. Variable durch b gegeben:
für ein $i \in \mathbb{N}$: $\bar{b}(A_i) = b(A_i)$

2) für $F = (\neg A)$ mit $A \in \mathcal{A}$ sei $\bar{b}(F) = \phi_\neg(\bar{b}(A))$ und für
$* \in \{\wedge, \vee, \to, \Leftrightarrow, \mid\}$ und $F = (A * B)$ $\bar{b}(F) := \phi_*(\bar{b}(A), \bar{b}(B))$

2008-10-21

Seminar TM: Gödelscher Unvollständigkeitssatz
Buch: Goldstern / Judah: incompleteness phenomenon
Fr. 7. Nov. 12 Uhr Steyrergasse 30 Zi C306 (Frisch-Zimmer)

Beweis der eindeutigen Losbarkeit von Aussagenlogischen Formeln $\in \mathcal{A}$
(in Bezug auf die induktive Struktur in der Def.)
zeigen: für jede Formel $\in \mathcal{A}$ gilt genau einer der Fälle

1) $B = A_i$ für ein $i \in \mathbb{N}$ (aussagenl. Variable)
2) $B = (\neg C)$ für eine Formel $C \in \mathcal{A}$
3) $B = (C * D)$ für Formeln $C, D \in \mathcal{A}$ und Junktor $* \in \{\wedge, \vee, \ldots\}$

und in Fall 1 ist i eindeutig best., in Fall 2 ist C eind. best. und in Fall 3 sind $C, D, *$ eind. best.

1) jede Formel $\in \mathcal{A}$ ist von dieser Gestalt (überlegen)
Fall 1 und 2,3 schließen sich gegenseitig aus
verwenden Lemma: Kein echter nicht trivialer Anfangsabschnitt einer Formel $\in \mathcal{A}$ ist selbst Formel $\in \mathcal{A}$. [weil: jede Formel $\in \mathcal{A}$ hat gleichviele rechte wie linke Klammern; jeder echte Anfangsabschnitt hat echt mehr linke Klammern]
Daraus folgt: Im Fall 3 sind $C, D, *$ eindeutig bestimmt.
Angenommen $B = (C * D) = (E \circ F)$ für $C, D, E, F \in \mathcal{A}$, $*, \circ$ Junktoren
$*$ ist k-ter Buchstabe, $\circ$ l-ter Buchstabe wenn $k = l$ dann $* = \circ$, $C = E$, $D = F$. Wenn $k < l$ dann C echter Anfangsabschnitt von E, geht nicht.
im Fall 2 ist C sowieso eindeutig und Fälle 2,3 schließen sich aus, da keine Formel $\in \mathcal{A}$ mit $\neg$ anfängt.

Die eindeutige Lesbarkeit ausnützend, haben wir für jede Funktion $b: A_i \to \{0,1\}$ eine Fortsetzung $\bar{b}: \mathcal{A} \to \{0,1\}$ definiert.

Dadurch definiert jede fixe Formel $A \in \mathcal{A}$ eine Funktion $f_A: \mathcal{B} \to \{0,1\}$ mit $\mathcal{B}$ = Menge aller Belegungen der Var. A_i mit Wahrheitswerten, dh. $\mathcal{B} = \{b \mid b: \{A_i \mid i \in \mathbb{N}\} \to \{0,1\}\}$ nämlich $f_A(b) = \bar{b}(A)$.

Man sieht leicht, dass $\bar{b}(A)$ nur von $b(A_1), \ldots, b(A_n)$ abhängt, wenn in A keine Variablen außer $A_1, \ldots, A_n$ vorkommen. Daher definiert $A \in \mathcal{A}$, in den außer $A_1, \ldots, A_n$ keine Var. vorkommen, eine Funktion $f_A: \{b: \{A_1, \ldots, A_n\} \to \{0,1\}\} \to \{0,1\}$
Alle vollständigen Belegungen c, die auf $A_1, \ldots, A_n$ mit b übereinstimmen, haben denselben Wert bei A: $b(A_i) = c(A_i)$ $i = 1, \ldots, n$

$\Rightarrow \bar{b}(A) = \bar{c}(A)$ und wir def. für $\hat{b}: \{A_1, \dots, A_n\} \to \{0,1\}$ $\bar{\hat{b}}(A) = \bar{b}(A)$

b bel. vollst. Belegung mit $b(A_i) = \hat{b}(A_i)$ $i = 1, \dots, n$

Definition: $A, B \in \mathcal{A}$ heißen äquivalent $(A \Leftrightarrow B)$ wenn $f_A = f_B$, dh. wenn $\forall b$ Belegung: $\bar{b}(A) = \bar{b}(B)$.

Beispiel: $(A_1 \to A_2) \Leftrightarrow ((\neg A_1) \vee A_2)$

A_1	A_2	$(A_1 \to A_2)$	$((\neg A_1) \vee A_2)$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1

$$\underbrace{((A_1 \to A_2) \wedge (A_3 \vee (\neg A_3)))}_{A} \Leftrightarrow \underbrace{(A_1 \to A_2)}_{B}$$

Betrachtet f_A, f_B auf Obermenge der in A, B vorkommenden Variablen

Definition: Eine Formel $A \in \mathcal{A}$ heißt Tautologie, wenn $f_A(b) = 1$ für jede Belegung $b: \{A_i \mid i \in \mathbb{N}\} \to \{0,1\}$.

$A \in \mathcal{A}$ heißt Kontradiktion, wenn $f_A(b) = 0$ für alle Belegungen

A heißt erfüllbar, wenn A keine Kontradiktion.

A unerfüllbar synonym zu Kontradiktion.

Beispiele für Tautologien

$(A \vee (\neg A))$ „tertium non datur" A bel. $\in \mathcal{A}$

$\neg(A \wedge (\neg A))$

Kontraposition: $(A \to B) \Leftrightarrow (\neg B \to \neg A)$

Proposition: $A, B \in \mathcal{A}$ dann ist $(A \leftrightarrow B)$ Tautologie genau dann, wenn $A \Leftrightarrow B$

Beweis: Ang. $A \leftrightarrow B$ Tautologie, d.h $\forall b: \bar{b}(A \leftrightarrow B) = 1$

dh. $\forall b: \phi_{\leftrightarrow}(\bar{b}(A), \bar{b}(B)) = 1$. wegen Def. von $\phi_{\leftrightarrow}$, nämlich

$\phi_{\leftrightarrow}(x,y) = \begin{cases} 1 & x = y \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ äquivalent: $\forall b: \bar{b}(A) = \bar{b}(B)$ also $A \Leftrightarrow B$

Ein paar Äquivalenzen:

Assoziativität von $\wedge$: $((A \wedge B) \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge (B \wedge C))$

analog für $\vee$

Kommutativität von $\wedge$: $(A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A)$

analog für $\vee$

de Morgan: $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

Wegen Assoziativität von $\wedge$ und $\vee$ sind alle Formeln $\in \mathcal{A}$, die eine Konjunktion von $B_1, .., B_n$ in dieser Reihenfolge sind, mit beliebiger Klammerung äquivalent, schreiben: $B_1 \wedge B_2 \wedge \dots \wedge B_n$ als Abkürzung für $(\dots(((B_1 \wedge B_2) \wedge B_3) \wedge \dots) \wedge B_n)$ (linksbündig geklammert)

Konjunktive Normalform, disjunktive Normalform

Definition: Ein Literal ist eine Formel der Gestalt A_i oder $\neg A_i$ (A_i Variable).

Eine duale Klausel ist eine Formel der Gestalt $B_1 \wedge B_2 \wedge \dots \wedge B_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ wobei jedes B_i ein Literal.

Eine duale n-Klausel ist Klausel der Gestalt $B_1 \wedge .. \wedge B_n$ wobei für $i = 1, .., n$ B_i entweder A_i oder $\neg A_i$ ist.

Definition: Eine Formel ist in disjunktiver Normalform, wenn sie von der Gestalt $C_1 \vee C_2 \vee .. \vee C_k$ mit C_i duale Klausel für $i = 1 \dots k$ ist, sie ist in disjunktiver n-Form wenn jedes C_i eine duale n-Klausel (und C_i paarweise verschieden)

Beispiel: $(A_1 \wedge \neg A_2) \vee (\neg A_1 \wedge \neg A_2)$ disj. 2-Form

$A_1 \vee (A_2 \wedge A_3) \vee (\neg A_1 \wedge A_3)$ disjunktive Normalform

Eine Klausel ist eine Formel der Gestalt $B_1 \vee B_2 \vee \ldots \vee B_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ wobei jedes B_i ein Literal.
Eine n-Klausel ist Klausel der Gestalt $B_1 \vee \ldots \vee B_n$ wobei für $i = 1, \ldots, n$ B_i entweder A_i oder $\neg A_i$ ist.

Definition: Eine Formel ist in Konjunktiver Normalform, wenn sie von der Gestalt $C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_k$ mit C_i Klausel für $i = 1 \ldots k$ ist, sie ist in konjunktiver n-Form wenn jedes C_i eine n-Klausel (und C_i paarweise verschieden)

Bemerkung: jeder Formel, in der außer $A_1, \ldots, A_n$ keine Var. vorkommen ist äquivalent zu einer disjunktiven Normalform, wenn keine Kontradiktion, dann ist sie äquivalent zu einer disjunktiven n-Form. Diese disj. n-Form ist eindeutig bis auf Reihenfolge der dualen Klauseln.
Kontradiktion äquivalent zu $(A_1 \wedge \neg A_1)$ (disj. Normalform, keine n-Form)

Bemerkung: jede Formel (außer $A_1, \ldots, A_n$ keine Var.) äquivalent zu konjunktiven Normalform, und wenn keine Tautologie, dann zu Konj. n-Form
Tautologie äquivalent zu $(A_1 \vee \neg A_1)$ (konj. Normalform, keine n-Form)

Beispiel:

$A_1 A_2$	A	disj. 2-Form: $(\neg A_1 \wedge \neg A_2) \vee (A_1 \wedge \neg A_2)$	Konj 2-Form: $(A_1 \vee \neg A_2) \wedge (\neg A_1 \vee \neg A_2)$
0 0	1	1	1
1 0	1	1	1
0 1	0	0	0
1 1	0	0	0

zw. Schritt, deMorgan:

$$\neg(\neg A_1 \wedge A_2) \wedge \neg(A_1 \wedge A_2) \overset{\text{deMorgan}}{\Leftrightarrow} (\neg(\neg A_1) \vee \neg A_2) \wedge (\neg A_1 \vee \neg A_2)$$
$$\overset{(*)}{\Leftrightarrow} (A_1 \vee \neg A_2) \wedge (\neg A_1 \vee \neg A_2)$$

(*) $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$ und: wenn man in einer Formel A eine Subformel B durch eine zu B äquivalente Formel C ersetzt, so bekommt man eine zu A äquivalente Formel.

Einholung vers. Doppelstunde Fr. 7. Nov 14-16 i12