Einholung vers. Doppelstunde Fr. 7. Nov 14-16 i12

2008-10-28

Definition: Subformeln einer Formel $B \in \mathcal{A}$.

Für $B = A_i$ ist nur A_i selbst eine Subformel. Wenn $B = (\neg C)$ dann ist die Menge der Subformeln von B: $\{B\} \cup \{$Subformeln von $C\}$. Wenn $B = (C * D)$, dann Menge der Subformeln: $\{B\} \cup \{$Subformeln von $C\} \cup \{$Subformeln von $D\}$.

Proposition: Wenn man in $A \in \mathcal{A}$ eine Subformel C durch eine äquivalente Formel C' ($C \Leftrightarrow C'$) ersetzt, erhält man eine zu A äquivalente Formel.

Beweis: Induktion nach der Struktur von A:

Fall $A = A_i$: einzige Subformel A_i durch C' mit $C' \Leftrightarrow A_i$ ersetzen: erhält C', $C' \Leftrightarrow A_i = A$ nach Vor.

Fall $A = (\neg C)$: Subformel A ersetzen durch C' mit $C' \Leftrightarrow A$ erhält $C' \Leftrightarrow A$ ✓ Subformel C_1 von C ersetzen durch $C' \Leftrightarrow C_1$ nach IV erhält man $A' = (\neg D)$ mit $D \Leftrightarrow C$

Dann gilt für jede Belegung b:

$$\bar{b}(A') = \phi_\neg(\bar{b}(D)) = \phi_\neg(\bar{b}(C)) = \bar{b}(A)$$

weil $D \Leftrightarrow C$ def. durch $\forall b: \bar{b}(C) = \bar{b}(D)$

Fall $A = (C * D)$: ganz A ersetzen: wie in Fall 1; ersetzen Subformel C_1 von C durch C_2 mit $C_1 \Leftrightarrow C_2$. Nach IV ist das Ergebnis des Ersetzens von C_1 durch C_2 in C eine zu C äquivalente Formel E.

zz. Wenn A' das Ergebnis des Ersetzens von C_1 durch C_2 in A, dann $A' \Leftrightarrow A$. $\forall b$ Belegung:

$$\bar{b}(A') = \phi_*(\bar{b}(E), \bar{b}(D)) = \phi_*(\bar{b}(C), \bar{b}(D)) = \bar{b}(A)$$

Proposition: Sei A Tautologie, $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{A}$. Dann ist $A[A_1/B_1, \dots, A_n/B_n]$ Tautologie.

Notation: $A[A_1/B_1, \dots, A_n/B_n]$ bezeichnet das Ergebnis des Einsetzens von B_i in jedem Vorkommen von A_i (einmalig und gleichzeitig, nicht rekursiv).

Beweisskizze: Sei $f_{A'}$ die Wahrheitswertefunktion von $A[A_1/B_1, \dots, A_n/B_n]$ Funktion in Variablen $A_1 \dots A_m$ $m \geq n$ und m so groß, dass in $B_1, \dots, B_n$ keine Variable außer $A_1, \dots, A_n$ vorkommt:

$$f_{A'}(A_1, \dots, A_m) = f_A(f_{B_1}(A_1, \dots, A_m), \dots, f_{B_n}(A_1, \dots, A_n), A_{n+1}, \dots, A_m)$$

Funktion ist konstant gleich 1 da f_A konstant $= 1$ ist.

Vollständigkeit von Teilsprachen von $\mathcal{A}$:

Sei $\mathcal{B} = \mathcal{A}_I$ die Teilmenge von $\mathcal{A}$ bestehend aus jenen Formeln in denen keine Junktoren außer jenen $\in I \subseteq \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, |, \neg\}$ vorkommen.

$\mathcal{B}$ heißt vollständig, wenn $\forall A \in \mathcal{A}\ \exists B \in \mathcal{B}$ mit $B \Leftrightarrow A$.

Wissen aus Existenz von konj. NF (bzw. disj. NF), dass $\mathcal{A}_{\{\neg, \wedge, \vee\}}$ vollständig ist.

Ü: $\mathcal{A}_{\{\neg, \wedge\}}$, $\mathcal{A}_{\{\neg, \vee\}}$ vollständig

Ü: $\mathcal{A}_{\{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}}$ nicht vollständig

Definition: $A \Rightarrow B$. B ist Folgerung von A (für $A, B \in \mathcal{A}$) definiert durch: $\forall b$ Belegung mit $\bar{b}(A) = 1$ gilt $\bar{b}(B) = 1$

Ü: aus der KNF von A lassen sich leicht die KNF von allen Folgerungen von A bestimmen (genauso für DNF).

Kompaktheitssatz

Definition: Eine Menge von Formeln $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ heißt erfüllbar wenn $\exists$ Belegung b mit $\forall B \in \mathcal{B} : \bar{b}(B) = 1$

$\mathcal{B}$ unerfüllbar, wenn $\forall b \; \exists B \in \mathcal{B} : \; \bar{b}(B) \neq 1$

Satz (Kompaktheitssatz): Sei $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$. Wenn $\mathcal{B}$ unerfüllbar, dann $\exists$ endl. Teilmenge $\{B_1, \dots, B_n\} \subseteq \mathcal{B}$, die unerfüllbar ist.

Äquivalent: Wenn jede endl. Teilmenge von $\mathcal{B}$ erfüllbar ist, dann auch $\mathcal{B}$ erfüllbar.

Bemerkung: Satz gilt auch, wenn man in Def. von $\mathcal{A}$ statt einer abzählbar unendl. Menge von Var. $\{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ eine überabzählbare Menge von Var. $\{A_i \mid i \in I\}$, I bel. groß, verwendet.

Topologischer Exkurs

Definition: Sei X Menge. Eine Topologie von X ist ein $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ sodass gilt:

1) $\emptyset, X \in \tau$
2) $U_i \in \tau \;\; \forall i \in I$ (I bel. Indexmenge), dann $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$
3) $U, W \in \tau \Rightarrow U \cap W \in \tau$

Die Elemente von τ nennt man „offene" Teilmengen von X.

(X, τ) heißt Topologischer Raum.

Beispiel: (X, d) metrischer Raum hat durch d def. Topologie:

$U \in \tau \Leftrightarrow \forall u \in U \; \exists \, \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(u) \subseteq U$

Definition: (X, τ) topologischer Raum: $A \subseteq X$ heißt abgeschlossen, wenn $X \setminus A$ offen ($(X \setminus A) \in \tau$).

Bemerkung: Sei (X,τ) top. Raum. Sei α die Menge der abgeschl. Mengen $\alpha = \{A \subseteq X \mid (X \setminus A) \in \tau\}$. Dann

1) $\emptyset, X \in \alpha$
2) $\forall i \in I: A_i \in \alpha \Rightarrow \bigcap_{i \in I} A_i \in \alpha$
3) $A, B \in \alpha \Rightarrow A \cup B \in \alpha$

Man kann durch Angabe von $\alpha \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit 1, 2, 3 eine Top τ auf X def. durch $\tau = \{U \subseteq X \mid (X \setminus U) \in \alpha\}$

Definition: Sei (X,τ) top. Raum, $\mathcal{B} \subseteq \tau$ heißt Basis der Topologie τ, wenn $\forall U \in \tau\ \exists \{B_i \mid i \in I\} \subseteq \mathcal{B}$ sodass
$U = \bigcup_{i \in I} B_i$

Beispiel: in $\mathbb{R}^n$ eine Basis der durch die Eukl. Metrik d geg. Topologie $\mathcal{B} = \{B_{1/r}(x) \mid r \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{Q}^n\}$ (abzählbare) Basis.

Bemerkung: Sei X Menge, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ sodass

1) $X, \emptyset \in \mathcal{B}$ und
2) $U, W \in \mathcal{B} \Rightarrow U \cap W \in \mathcal{B}$

dann ist auf X eine Topologie definiert durch
$U \in \tau \Leftrightarrow \{B_i \mid i \in I\} \subseteq \mathcal{B}$, $U = \bigcup_{i \in I} B_i$ und $\mathcal{B}$ ist eine Basis dieser Topologie τ.

Definition der <u>Produkttopologie</u>: Seien für $i \in I$ (bel. Indexmenge) X_i topol. Räume. Dann ist auf dem kartesischem Produkt $\prod_{i \in I} X_i$ die Produkttopologie definiert durch Angabe einer Basis $\mathcal{B}$, nämlich $B \in \mathcal{B}$ genau dann, wann $\exists\, i_1, \dots, i_n \in I$ und $U_{i_1}, \dots, U_{i_n}$ mit U_{i_j} offen $\subseteq X_{i_j}$ $(U_{i_j} \in \tau_{i_j})$ sodass $b = (b_i)_{i \in I} \in B \Leftrightarrow$ für $j = 1, \dots, n$ $b_{i_j} \in U_{i_j}$
$B = X_1 \times U_2 \times X_3 \times U_4 \times X_5 \times \dots \times X_i$. B def. durch: für endl. viele Koordinaten muss $b_i \in U_i$ sein, alle anderen Koordinaten ohne Einschränkung.

Definition des Kartesischen Produkts am Bsp. des Produkts von endlich vielen Mengen $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n = \prod_{i=1}^{n} X_i = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in X_i\}$

Für eine Menge von X_i induziert mit $i \in I$, I bel. Indexmenge ist $\prod_{i\in I} X_i = \{(x_i)_{i\in I} \mid x_i \in X_i\}$ die Menge der „Auswahlfunktionen"

$f: I \to \bigcup_{i \in I} X_i$ Funktion mit $f(i) \in X_i$ für alle $i \in I$.

Kürzen eine Auswahlfunktion f durch die „Liste" ihrer Werte ab: $(x_i)_{i\in I}$ steht für f mit $f(i) = x_i \in X_i$.

In $\prod_{i\in I} X_i$ kann man „Quader" definieren durch $\prod_{i\in I} Y_i \subseteq \prod_{i\in I} X_i$ wenn für jedes i eine Teilmenge $Y_i \subseteq X_i$ gegeben, dann sei $\prod_{i\in I} Y_i = \{(y_i)_{i\in I} \mid y_i \in Y_i \ \forall i\}$.

Definition: Ein top. Raum (X, τ) heißt kompakt, wenn jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung hat, dh. wenn $\{U_i : i \in I\} \subseteq \tau$ eine Kollektion von bel. vielen offenen Teilmengen von X sodass $X \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$, dann $\exists i_1, \dots, i_n \in I : X \subseteq U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \dots \cup U_{i_n}$