Definition des Kartesischen Produkts am Bsp. des Produkts von endlich vielen Mengen $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n = \prod_{i=1}^{n} X_i = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in X_i\}$

Für eine Menge von X_i induziert mit $i \in I$, I bel. Indexmenge ist $\prod_{i \in I} X_i = \{(x_i)_{i \in I} \mid x_i \in X_i\}$ die Menge der „Auswahlfunktionen"

$f : I \longrightarrow \bigcup_{i \in I} X_i$ Funktion mit $f(i) \in X_i$ für alle $i \in I$.

Kürzen eine Auswahlfunktion f durch die „Liste" ihrer Werte ab: $(x_i)_{i \in I}$ steht für f mit $f(i) = x_i \in X_i$.

In $\prod_{i \in I} X_i$ kann man „Quader" definieren durch $\prod_{i \in I} Y_i \subseteq \prod_{i \in I} X_i$

wenn für jedes i eine Teilmenge $Y_i \subseteq X_i$ gegeben, dann sei $\prod_{i \in I} Y_i = \{(y_i)_{i \in I} \mid y_i \in Y_i \; \forall i\}$.

Definition: Ein top. Raum (X, τ) heißt kompakt, wenn jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung hat, dh. wenn $\{U_i : i \in I\} \subseteq \tau$ eine Kollektion von bel. vielen offenen Teilmengen von X sodass $X \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$, dann $\exists i_1, \ldots, i_n \in I : X \subseteq U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \ldots \cup U_{i_n}$

2008-11-04

Fr. 7.11. Einholung einer versäumten VO 14-16h i12

Definition: $S \subseteq X$, (X, τ) topologischer Raum, S heißt kompakt $:\Leftrightarrow$ Aus $S \subseteq \bigcup_{i \in I} O_i$ mit O_i offen $\forall i$ folgt $\exists i_1, \ldots, i_n \in I$ sodass $S \subseteq O_{i_1} \cup O_{i_2} \cup \ldots \cup O_{i_n}$. „Jede offene Überdeckung von S hat endliche Teilüberdeckung".

Beispiel:
- jede endliche Teilmenge (eines bel. top. Raumes) ist kompakt
- $S \subseteq \mathbb{R}^n$ (Euklidische Metrik):

  S kompakt $\Leftrightarrow$ S beschränkt ($\exists B_r(0)$ mit $S \subseteq B_r(0)$) und S abgeschlossen

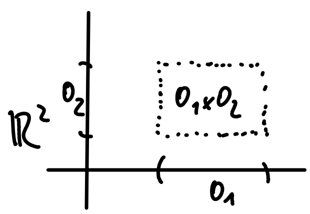
Bemerkung: S kompakt $\Leftrightarrow$ Aus $S \cap \bigcap_{i \in I} A_i = \emptyset$ mit A_i abgeschlossen für alle i folgt: $\exists\, i_1, \ldots, i_n \in I$: $S \cap (A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_n}) = \emptyset$

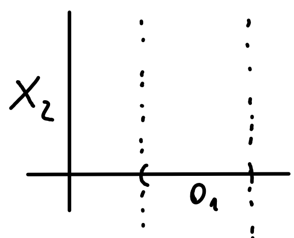
Satz von Tychonoff: Seien X_i (für $i \in I$) kompakte top. Räume, dann ist $\prod_{i \in I} X_i$ (mit Produkttopologie) kompakt.

Beweis: Topologie-Vorlesung.

Produkttopologie: die offenen Mengen sind genau die Vereinigung von „offenen Basismengen". Offene Basismenge ist Menge der Form für eine endl. Menge $\{i_1, \ldots, i_n\} \subseteq I$. $O = O_{i_1} \times O_{i_2} \times \ldots \times O_{i_n} \times \prod_{i \in I \setminus \{i_1, \ldots, i_n\}} X_i$ für O_{i_k} offen $\subseteq X_{i_k}$

Gegensatz: Box-Topologie: Offene Basismengen: $\prod_{i \in I} O_i = \{(x_i)_{i \in I} \mid \forall i : x_i \in O_i\}$ O_i offen $\subseteq X_i$





Bemerkung: Tychonoff für Box-Topologie gilt nicht.

Anwendung des Satzes von Tychonoff auf Aussagenlogik:

Für $A \in \mathcal{A}$ sei $\Delta(A) = \{b \text{ Belegung} \mid \bar{b}(A) = 1\} \subseteq \prod_{i \in \mathbb{N}} \{0,1\}$ Menge der Belegungen (Funktionen $\{A_i \mid i \in \mathbb{N}\} \to \{0,1\}$) als Produktraum $\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \prod_{i \in \mathbb{N}} \{0,1\}$ auffassen durch $b \mapsto (b(A_i))_{i \in \mathbb{N}}$.
Es gilt $A \Leftrightarrow B$ (nach Def. genau dann, wenn $\forall b : \bar{b}(A) = \bar{b}(B)$) genau dann, wenn $\Delta(A) = \Delta(B)$
$\Leftrightarrow$ Äquivalenzrelation. Betrachten Menge der Äquivalenzklassen von Formeln $\in \mathcal{A}$. Jeder Klasse $\bar{A}$ zuordnen $\Delta(\bar{A}) = \Delta(A)$
wohldefiniert: $B \in \bar{A}$, dh. $B \Leftrightarrow A$ dann $\Delta(B) = \Delta(A)$.

Definition:

Eine Formel A ist erfüllbar $\Leftrightarrow$ $\Delta(A) \neq \emptyset$

Eine Menge von Formeln $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ heißt erfüllbar, wenn $\exists b$ Belegung sodass $\forall C \in \mathcal{C} : \bar{b}(C) = 1$. Das ist äquivalent zu $\bigcap_{C \in \mathcal{C}} \Delta(C) \neq \emptyset$.

Kompaktheitssatz der Aussagenlogik:

$\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ erfüllbar genau dann, wenn jede endl. Teilmenge $\mathcal{C}' = \{C_1, \dots, C_n\} \subseteq \mathcal{C}$ erfüllbar ist.

Variante, äquivalent: Wenn $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ unerfüllbar (nicht erfüllbar), dann $\exists\, \mathcal{C}'$ endlich $\subseteq \mathcal{C}$ mit $\mathcal{C}'$ unerfüllbar, dh. wenn $\bigcap_{C \in \mathcal{C}} \Delta(C) = \emptyset$ dann $\exists\, C_1, \dots, C_n$ endl. viele $\in \mathcal{C}$ sodass $\Delta(C_1) \cap \dots \cap \Delta(C_n) = \emptyset$.

Das folgt aus Tychonoff, angewendet auf $\prod_{i \in \mathbb{N}} \{0,1\}$ mit Produkttop.

Bemerkung: X beliebige Menge: die diskrete Topologie auf X ist definiert durch: $\tau = \mathcal{P}(X)$ „jede Teilmenge von X offen".

Bemerkung: X endl. Menge, als top. Raum betrachtet ohne dass die Topologie eigens erwähnt: diskrete Top. gemeint.

Produkttop. auf $\prod_{i \in \mathbb{N}} \{0,1\}$ hat als offene Basismengen genau die Mengen der Form $\{(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \mid x_{i_1} = \varepsilon_{i_1}, x_{i_2} = \varepsilon_{i_2}, \dots, x_{i_n} = \varepsilon_{i_n}\}$, $\varepsilon_{i_k} \in \{0,1\}$.
Diese offenen Basismengen sind gleichzeitig abgeschlossen:
das Komplement ist eine Vereinigung von offenen Basismengen, also offen.

Es gilt: für jede Formel $A \in \mathcal{A}$ ist $\Delta(A)$ abgeschlossen, da als Vereinigung von endl. vielen offen-abgeschlossenen Basismengen darstellbar.
Wenn in A keine Var. außer $A_1, \dots, A_n$ vorkommen, dann hängt $\bar{b}(A)$ nur von $b|_{\{A_1, \dots, A_n\}} : \{A_1, \dots, A_n\} \to \{0,1\}$ ab.
Seien $b_1, \dots, b_k$ jene Belegungen von $A_1, \dots, A_n$ mit $\bar{b}(A) = 1$

dann $\Delta(A) = \bigcup_{i=1}^{k} \{(x_m)_{m\in\mathbb{N}} \mid x_1 = b_i(1), x_2 = b_i(2), \ldots, x_n = b_i(n)\}$

$\Delta(A)$ abgeschlossen als Vereinigung von k abgeschl. Mengen, wobei $k \leq 2^n$, $n = \#$ der in A vorkommenden Variablen, $k = \#$ der Belegungen von $\{A_1, \ldots, A_n\}$, die A erfüllen.

Folgern Kompaktheitssatz aus Tychonoff so:

$\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$, wenn $\mathcal{C}$ unerfüllbar, dann $\bigcap_{C\in\mathcal{C}} \Delta(C) = \emptyset$

Da $\prod_{i\in\mathbb{N}} \{0,1\}$ kompakt und jedes $\Delta(C)$ abgeschlossen, also $\exists$ endl. viele $C_1, \ldots, C_\ell \in \mathcal{C}$ mit $\Delta(C_1) \cap \ldots \cap \Delta(C_\ell) = \emptyset$, dh. $\{C_1, \ldots, C_\ell\}$ unerfüllbar.

Boolesche Algebren

1) Boolesche Algebren als Ring

Definition: Ein Ring (mit 1) $(R, +, \cdot)$ heißt Boolsche Algebra, wenn $\forall r \in R: r^2 = r$ (jedes $r \in R$ idempotent)

Beispiel: $\prod_{s\in S} \{0,1\}$ mit koordinatenweiser Addition und Multiplikation wobei in jeder einzelnen Koordinate Add. und Mult. von ganzen Zahlen mod 2:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

Wiederholung: Ein Ring $(R, +, \cdot)$ ist eine Menge $R \neq \emptyset$ mit 2-wertigen Operationen $+: R \times R \to R$, $\cdot: R \times R \to R$ sodass gilt:

$(R,+)$ komm Gruppe

1) $r + (s+t) = (r+s) + t$
2) $\exists e \in R: \forall r \in R: e + r = r + e = r$ (e eindeutig, mit 0 bezeichnet)
3) $\forall r \in R: \exists s \in R: r + s = s + r = 0$ (s eindeutig, mit $-r$ bezeichnet)
4) $r + s = s + r$

5) $r \cdot (s \cdot t) = (r \cdot s)\, t$

6) $r \cdot (s+t) = r \cdot s + r \cdot t$, $\cdot$ bindet stärker als $+$

$(s+t) \cdot r = s \cdot r + t \cdot r$

7) Ring mit 1 zusätzlich

$\exists u \in R : \forall r \in R : u \cdot r = r \cdot u = r$ (u eindeutig, mit 1 bezeichnet)

Ein Ring heißt kommutativ, wenn $\forall r, s \in R : r \cdot s = s \cdot r$

Lemma: $(R, +, \cdot)$ Boolesche Algebra, dann R kommutativ, und

$\forall r \in R : r = -r$

Beweis: $r + s = (r+s)^2 = r^2 + rs + sr + s^2 = r + rs + sr + s = (r+s) + (rs+sr)$

Re u. Links $(r+s)$ kürzen, dh. $-(r+s)$ addieren.

$0 = rs + sr$ daher $rs = -sr$. Das gilt $\forall r, s \in R$, insbes. f. $s = 1$:

$r \cdot 1 = -1 \cdot r \Rightarrow r = -r$

Außerdem: $rs = -sr = sr \Rightarrow$ Kommutativität.

Definition: Sei $(R, +, \cdot)$ Boolesche Algebra, definieren Relation $\leq$ auf R

durch $r \leq s :\Leftrightarrow r \cdot s = r$