5) $r\cdot(s\cdot t) = (r\cdot s)\,t$

6) $r\cdot(s+t) = r\cdot s + r\cdot t$, $\cdot$ bindet stärker als $+$
$(s+t)\cdot r = s\cdot r + t\cdot r$

7) Ring mit 1 zusätzlich
$\exists u \in R: \forall r \in R: u\cdot r = r\cdot u = r$ (u eindeutig, mit 1 bezeichnet)

Ein Ring heißt kommutativ, wenn $\forall r,s \in R: r\cdot s = s\cdot r$

Lemma: $(R,+,\cdot)$ Boolesche Algebra, dann R kommutativ, und
$\forall r \in R: r = -r$

Beweis: $r+s = (r+s)^2 = r^2 + rs + sr + s^2 = r + rs + sr + s = (r+s) + (rs+sr)$
Re u. Links $(r+s)$ kürzen, dh. $-(r+s)$ addieren.
$0 = rs + sr$ daher $rs = -sr$. Das gilt $\forall r,s \in R$, insbes. f. $s=1$:
$r\cdot 1 = -1\cdot r \Rightarrow r = -r$
Außerdem: $rs = -sr = sr \Rightarrow$ Kommutativität.

Definition: Sei $(R,+,\cdot)$ Boolesche Algebra, definieren Relation $\leq$ auf R
durch $r \leq s :\Leftrightarrow r\cdot s = r$

2008-11-07

Wh: Haben auf Booleschen Algebra (dh. auf Ring $(R,+,\cdot)$ in dem $\forall r \in R: r^2 = r$)
eine Relation definiert durch
$r \leq s :\Leftrightarrow r\cdot s = r$ (entspricht Enthaltensein)

Das ist eine Ordnungsrelation:

1) Reflexivität, zz: $\forall r \in R: r\cdot r = r$ ✓

2) Transitivität, zz: $r \leq s,\ s \leq t \Rightarrow r \leq t$:
haben $r\cdot s = r$, $s\cdot t = s$; es folgt: $rt = rst = rs = r$ dh. $r \leq t$

3) Antisymmetrie, zz: $r \leq s \wedge s \leq r \Rightarrow r = s$:
$r\cdot s = r$ und $s\cdot r = s$. Kommutativität des Ringes: $r = r\cdot s = s\cdot r = s$: $r = s$ ✓

Bzgl. $\leq$ haben je zwei Elemente $r, s \in R$ ein „größtes gemeinsames Kleineres" $\inf(r,s)$ und ein „kleinstes gemeinsames Größeres" $\sup(r,s)$

Definition: Gegeben Menge mit Ordnungsrelation $(X, \leq)$. Wir sagen

- $\inf(a,b) = i \Leftrightarrow$
  1) $i \leq a \wedge i \leq b$
  2) $\forall x \in X$ mit $x \leq a$, $x \leq b$ gilt $x \leq i$

  ($\inf(a,b)$ muss nicht existieren, aber wenn, dann eindeutig)
- $\sup(a,b) = s \Leftrightarrow$
  1) $a \leq s \wedge b \leq s$
  2) $\forall x \in X$ mit $a \leq x$, $b \leq x$ gilt $s \leq x$

  ($\sup(a,b)$ muss nicht existieren, aber wenn, dann eindeutig)

In Boolescher Algebra ist für $r, s \in R$:

$\inf(r,s) = r \cdot s$, $\sup(r,s) = r + s + r \cdot s$

Beweis: • $r(r \cdot s) = (r \cdot r) \cdot s = r^2 \cdot s = r \cdot s \Rightarrow r \cdot s \leq r$ analog $r \cdot s \leq s$

wenn $x \leq r$, $x \leq s$ zz: $x \leq r \cdot s$. Wissen $x \cdot r = x$, $x \cdot s = x$:

$x \cdot (rs) = (x \cdot r) s = x \cdot s = x$ also $x \leq r \cdot s$ ✓

• $r(r+s+r \cdot s) = r^2 + rs + r^2 s = r$ also $r \leq r+s+r \cdot s$ analog $s \leq r+s+r \cdot s$

ang. $r \leq x$, $s \leq x$ dh $rx = r$, $sx = s$:

$(r+s+rs)x = rx + sx + rsx = r+s+rs$ also $r+s+rs \leq x$

Definition: Eine Menge X mit Ordnungsrelation $\leq$ heißt Verband (lattice) wenn zu je zwei Elementen $x, y \in X$ ein $\inf(x,y)$ und ein $\sup(x,y)$ in X existieren.

Schreibt dann $x \wedge y$ „meet" für $\inf(x,y)$ und $x \vee y$ „join" für $\sup(x,y)$

Es gelten dann V1–V4 für $\wedge, \vee$

V1) $x \wedge y = y \wedge x$ $\quad x \vee y = y \vee x$

V2) $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$ $\quad (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$

V3) $x \wedge x = x$ $\quad x \vee x = x$

V4) $(x \wedge y) \vee y = y \quad (x \vee y) \wedge y = y$

Beweis: ad V1) sup, inf symmetrisch in x, y definiert

Definition: Gegeben $(X, \leq)$, $Y \subseteq X$ dann sei

$i = \inf Y :\Leftrightarrow \forall y \in Y: i \leq y$ und wenn $\forall y \in Y: x \leq y$ dann $x \leq i$

$s = \sup Y :\Leftrightarrow \forall y \in Y: y \leq s$ und wenn $\forall y \in Y: y \leq x$ dann $s \leq x$

sup, inf muss es nicht für jede Menge $Y \subseteq X$ geben, aber wenn, dann eindeutig.

Beweis: ad V2)

Zeigt in Verband $(X, \leq)$ ist sowohl

$\inf(x, y, z) = x \wedge (y \wedge z)$ als auch

$\inf(x, y, z) = (x \wedge y) \wedge z \Rightarrow$ Gleichheit

analog sup.

Mit Induktion gilt in jedem Verband $(X, \leq)$:

es gibt zu jeder endlichen Menge $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq X$ sup und inf.

Jede Klammerung von $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n$ ist inf, jede Klammerung von $x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n$ erfüllt Bedingung für sup.

Bemerkung: ein Verband, in dem $\forall Y \subseteq X$ sup Y und inf Y existieren heißt vollständiger Verband.

Beweis: ad V3) $\sup(x, x) = x$, $\inf(x, x) = x$ ✓

ad V4) Übung

Umgekehrt bekommt man aus jeder Menge X mit 2-stelligen Operationen $\wedge, \vee$ die V1–V4 erfüllen einen Verband, indem man

$x \leq y :\Leftrightarrow x \wedge y = x$ [äquivalent $\Leftrightarrow x \vee y = y$ Ü]

Überprüfen, dass so gewonnenes $(X, \leq)$ Verband:

Je zwei Elemente haben inf, nämlich $\inf(x,y) = x \wedge y$ und sup, nämlich $\sup(x,y) = x \vee y$.

Aus V1–V4 ableiten, dass $\inf(x,y) = x \wedge y$:

$(x \wedge y) \wedge y = x \wedge (y \wedge y) = x \wedge y$ also $(x \wedge y) \leq y$

$(x \wedge y) \wedge x = (y \wedge x) \wedge x = y \wedge (x \wedge x) = y \wedge x$ also $(x \wedge y) \leq x$

Ang.: $z \leq x$, $z \leq y$. zz. $z \leq x \wedge y$: Wissen $z \wedge y = z$, $z \wedge x = z$

$z \wedge (x \wedge y) = (z \wedge x) \wedge y = z \wedge y = z$ also $z \leq x \wedge y$

$\sup(x,y) = x \vee y$ folgt analog aus V1–V4 und Def. von $\leq$

Man nennt auch eine Menge $(X, \wedge, \vee)$ sodass $\wedge, \vee$ die Axiome V1–V4 erfüllen Verband.

Aus einem Verband $(X, \leq)$ konstruieren $(X, \wedge, \vee)$ durch $x \wedge y := \inf(x,y)$ $x \vee y := \sup(x,y)$.

Aus einem Verband $(X, \wedge, \vee)$ konstruieren $(X, \leq)$ durch $x \leq y :\Leftrightarrow x \wedge y = x$.

Von $(X, \leq)$ auf $(X, \wedge, \vee)$ übergehen und aus $\wedge, \vee$ Ordnungsrel. $\leq$ definieren $\Rightarrow$ man bekommt die ursprüngliche Relation $\leq$ zurück: es gilt nämlich in $(X, \leq)$ $x \leq y \Leftrightarrow \inf(x,y) = x$ (bzw. auch $x \leq y \Leftrightarrow \sup(x,y) = y$)

Ü: Von $(X, \wedge, \vee)$ zu $(X, \leq)$ übergehen durch $x \leq y :\Leftrightarrow x \wedge y = x$ und dann aus $\leq$ (für das sup, inf je zweier El. existieren) $\wedge, \vee$ konstruieren durch $x \wedge y = \inf(x,y)$, $x \vee y = \sup(x,y)$, dann sind die neuen $\wedge, \vee$ dieselben wie die, von denen man ausgegangen ist.

Zeigen Eigenschaften des aus einer Booleschen Algebra gewonnenen Verbands:

In dem aus einer Booleschen Algebra $(R,+,\cdot)$ gewonnenen Verband gibt es ein größtes Element $\sup R = 1$ und ein kleinstes Element $\inf R = 0$.

Da $x \leq y :\Leftrightarrow x \cdot y = x$ gilt $\forall x \in R: x \cdot 1 = x$ also $\forall x \in R: x \leq 1$.

Außerdem gilt in jedem Ring $(R,+,\cdot)$ $\forall r \in R: 0 \cdot r = r \cdot 0 = 0$

[Aus Ringaxiomen folgt $0 = 0 + 0$ also $\forall r \in R: r \cdot 0 = r(0+0) = r \cdot 0 + r \cdot 0$, zu beiden Seiten addieren $-(r \cdot 0)$, bekommt $0 = r \cdot 0$ analog $0 \cdot r = (0+0)r$ etc.]

Insbes. in der Booleschen Algebra $\forall x \in R: 0x = 0$ dh $0 \leq x$.

Sprechweise: 0 ist neutrales Element bzgl. $+$: $0 + x = x + 0 = x$

0 ist absorbierendes El. bzgl. $\cdot$: $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$

1 ist neutrales Element bzgl. $\cdot$: $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$

1 ist absorbierendes El. bzgl. $+$: $1 + x = x + 1 = 1$

Definition: In einem Verband $(X, \leq)$ mit kleinstem El. 0 und größtem El. 1 heißt y Komplement von x, wenn $x \wedge y = 0$ und $x \vee y = 1$ [dh. $\inf(x,y) = 0$, $\sup(x,y) = 1$]

Ein Verband in dem zu jedem $x \in X$ ein Komplement existiert, heißt Komplementärer Verband.

Proposition: Der von einer Booleschen Algebra kommende Verband ist komplementären Verband: $1 + x$ ist Komplement zu x:

Beweis: $(1+x)x = x + x^2 = x + x = 0$ dh. $(1+x) \wedge x = 0$ dh. $\inf(1+x, x) = 0$

$(1+x) + x + (1+x) \cdot x = 1 + x + x + 0 = 1$ dh. $(1+x) \vee x = 1$ dh. $\sup(1+x, x) = 1$

Definition: Ein Verband $(X, \wedge, \vee)$ heißt distributiv, wenn $\forall a,b,c \in X$:

$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

Bemerkung: Ein Verband erfüllt $\forall a,b,c: a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ genau dann, wenn $\forall a,b,c: a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

Proposition: Der von einer Booleschen Algebra kommende Verband ist distributiv.