

Bemerkung: Ein Verband erfüllt  $\forall a, b, c : a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$   
genau dann, wenn  $\forall a, b, c : a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

Proposition: Der von einer Booleschen Algebra kommende Verband ist distributiv.

2008-11-11

Satz: Der aus einer Booleschen Algebra konstruierte Verband ist distributiv.

Beweis: z.z.:  $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

dh. z.z.:  $x(y + z + yz) = (xy) + (xz) + (xy)(xz)$

$x(y + z + yz) = xy + xz + \underbrace{xyz}_{x^2yz} = xy + xz + xyz \checkmark$

Ü: Verband erfüllt  $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$  genau dann, wenn er  $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$  erfüllt.

Haben gezeigt: der aus einer Booleschen Algebra  $[(R, +, \cdot)]$  Ring m. 1 in dem  $\forall r \in R: r^2 = r$  konstruierte Verband  $[\leq \text{ def. durch } x \leq y : \Leftrightarrow xy = x \text{ bzw. } x \wedge y := \inf(x, y), x \vee y := \sup(x, y) \text{ bzgl. dieser } \leq \text{-Relation}]$  ist ein distributiver, komplementärer Verband.

Satz: In jedem distr. kompl. Verband  $[(V, \wedge, \vee)]$  sodass  $V1-V4$  erfüllt und  $V$  ein größtes Element 1 und ein kleinstes Element 0 hat und  $\forall x \in V \exists x^c \in V$  mit  $x \wedge x^c = 0, x \vee x^c = 1$  gilt:

1)  $\forall x \in V: x^c$  eindeutig bestimmt

2) de Morgan:  $(x \wedge y)^c = x^c \vee y^c, (x \vee y)^c = x^c \wedge y^c$

Beweis: 1) ang.  $y_1, y_2$  erfüllen beide Bedingung von  $x^c$ :

$y_1 = y_1 \wedge 1 = y_1 \wedge (x \vee y_2) = (y_1 \wedge x) \vee (y_1 \wedge y_2) = 0 \vee (y_1 \wedge y_2)$

$= y_1 \wedge y_2$  dh.  $y_1 \leq y_2$ . Also da  $y_1, y_2$  bol. Komplemente

von  $x$  folgt mit  $y_1, y_2$  vertauscht:  $y_2 \leq y_1$ . Insgesamt  $y_1 = y_2$

2) zeigen:  $x^c \vee y^c$  erfüllt die Bedingungen für Komplement von  $x \wedge y$ :

$$(x^c \vee y^c) \wedge (x \wedge y) = (x^c \wedge x \wedge y) \vee (y^c \wedge x \wedge y) \stackrel{\text{Komm.}}{=} 0 \vee 0 = 0$$

$$(x^c \vee y^c) \vee (x \wedge y) = (x^c \vee y^c \vee x) \wedge (x^c \vee y^c \vee y) = (1 \vee y^c) \wedge (x^c \vee 1) \\ = 1 \wedge 1 = 1$$

anderer de Morgan als  $\bar{\bar{U}}$

Jetzt gehen wir von einem distr. Kompl. Verband  $(V, \wedge, \vee)$  aus und

Konstruieren Boolesche Algebra  $(V, +, \cdot)$  durch  $x \cdot y := x \wedge y$

$$x + y := (x \wedge y^c) \vee (x^c \wedge y)$$

Bemerkung:  $x + y = (x \vee y) \wedge (x \wedge y)^c$

$$\text{nämlich } (x \wedge y^c) \vee (x^c \wedge y) = (x \vee x^c) \wedge (x \vee y) \wedge (y^c \vee x^c) \wedge (y^c \vee y) \\ = 1 \wedge (x \vee y) \wedge (y^c \vee x^c) \wedge 1 = (x \vee y) \wedge (y^c \vee x^c) = (x \vee y) \wedge (x \wedge y)^c$$

Jedes Element  $x \in V$  idempotent:  $x = x \cdot x$  heißt  $x = x \wedge x$  (ein Verband-Axiom).

Assoziativität von  $\cdot$  ist Assoziativität von  $\wedge$ : auch Verband Axiom.

Neutrales Element bzgl.  $\cdot$  ist das größte El. 1 des Kompl. Verbands:

$$1 \wedge x = x \wedge 1 = x.$$

Neutrales Element bzgl.  $+$  ist das kleinste El. 0 des Kompl. Verbands:

$$x + 0 = (x \wedge 0^c) \vee (x^c \wedge 0) = (x \wedge 1) \vee (x^c \wedge 0) = x \vee 0 = x$$

$$0 + x = 0 \text{ wg. Kommutativität von } +$$

Kommutativität von  $+$  folgt aus Kommutativität von  $\vee$ .

Inverses El. von  $x$  bzgl.  $+$ :  $-x$  existiert und  $-x = x$

$$x + x = (x \wedge x^c) \vee (x^c \wedge x) = 0 \vee 0 = 0$$

Assoziativität von  $+$  ist Assoziativität von  $\vee$ .

Noch zz. Ass. von  $+$ , Distributivität

$$x + (y + z) = (x \wedge (y + z)^c) \vee (x^c \wedge (y + z)) \\ = (x \wedge ((y \wedge z^c)^c \wedge (y^c \wedge z)^c)) \vee (x^c \wedge ((y \wedge z^c) \vee (y^c \wedge z)))$$

Bemerkung: In jedem komplementären Verband gilt  $(x^c)^c = x$

$$\begin{aligned} &= (x \wedge (y^c \vee z) \wedge (y \vee z^c)) \vee (x^c \wedge ((y \wedge z^c) \vee (y^c \wedge z))) \\ &= ((x \wedge y^c) \vee (x \wedge z)) \wedge (y \vee z^c) \vee ((x^c \wedge y \wedge z^c) \vee (x^c \wedge y^c \wedge z)) \\ &= ((x \wedge y^c) \wedge (y \vee z^c)) \vee ((x \wedge z) \wedge (y \vee z^c)) \vee (x^c \wedge y \wedge z^c) \vee (x^c \wedge y^c \wedge z) \\ &= (x \wedge y^c \wedge z^c) \vee (x \wedge z \wedge y) \vee (x^c \wedge y \wedge z^c) \vee (x^c \wedge y^c \wedge z) \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist wegen Kommutativität von  $\wedge, \vee$  symmetrisch in  $x, z$ :

d.h.  $x + (y + z) = z + (y + x)$ . Komm. von  $+$  folgt  $x + (y + z) = (x + y) + z$ .

Überprüfen:  $x \cdot (y + z) = xy + xz$ ,  $(y + z)x = yx + zx$  mit Distributivitätsgesetzen von  $\wedge, \vee$  und de Morgan...

Bemerkung: Aus Boolescher Algebra einen distr. kompl. Verband konstr. und aus diesem Boolesche Algebra: bekommt ursprüngliche Boolesche Algebra.

Analog von distr. kompl. Verband ausgehend.

Definition: Eine Unter algebra einer Booleschen Algebra  $(R, +, \cdot)$  ist eine Teilmenge  $S \subseteq R$  die bzgl.  $+, -, \cdot$  abgeschlossen ist und 1 enthält; d.h.  $S \subseteq R: \forall a, b \in S: a + b, a - b, a \cdot b \in S$  und  $1 \in S$ .

Bemerkung: Eine Unter algebra einer Booleschen Algebra ist bzgl.

Einschränkungen von  $+, \cdot$  auf  $S: S \times S \rightarrow S$ ,  $\cdot: S \times S \rightarrow S$  wieder eine Boolesche Algebra (da bzgl.  $+, -, \cdot$  abgeschlossen).

Eine bzgl.  $+, -, \cdot$  abgeschl. Teilmenge muss nicht 1 enthalten.

Beispiel:  $Y \subseteq X: \mathcal{P}(Y) \subseteq \mathcal{P}(X)$  abg. bzgl.  $\cap, \cup, \sim \rightarrow \cap, \Delta$  (sind  $\cdot, +$ ) aber  $\mathcal{P}(Y)$  enthält nicht  $1_{\mathcal{P}(X)} = X$ .

Satz von Stone: Jede Boolesche Algebra ist (isomorph zu) eine(r) Unter algebra einer Booleschen Algebra der Form  $(\mathcal{P}(A), \cap, \cup)$ .

[Isomorphismus Boolescher Algebren ist Ringisom. mit  $f(1)=1$   
d.h.  $f: A \rightarrow B$  bijektiv mit  $f(a_1+a_2) = f(a_1) + f(a_2)$ ,  $f(a_1 \cdot a_2) = f(a_1) \cdot f(a_2)$   
und  $f(1) = 1$ ]

Nämlich genauer: Boolesche Algebra  $A$  isomorph zur Unter algebra der offen-abgeschlossenen Teilmengen des Stone'schen Raumes  $S(A)$ , der wiederum eine Unter algebra von  $(\mathcal{P}(A), \cap, \cup)$  ist.  $\mathcal{P}(A)$

auffassen als  $\prod_{a \in A} \{0,1\}$  [jede Teilmenge  $S$  von  $A$  mit ihrer charakteristischen Funktion  $\chi_S: A \rightarrow \{0,1\}$   $\chi(x) = \begin{cases} 1 & x \in S \\ 0 & x \notin S \end{cases}$  identifizieren].

$\prod_{a \in A} \{0,1\}$  auffassen als Menge aller Funktionen  $f: A \rightarrow \{0,1\}$  mit elem. weiser Addition und Mult.  $S(A) = \{f: A \rightarrow \{0,1\} \mid f \text{ Ringhomo.}\}$   
 $= \{f: A \rightarrow \{0,1\} \mid f(a+b) = f(a) + f(b), f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b), f(1) = 1\}$