Satz von Stone: Jede Boolesche Algebra ist (isomorph zu) eine(r) Unteralgebra einer Booleschen Algebra der Form $(\mathcal{P}(A), \cap, \cup)$.

[Isomorphismus Boolescher Algebren ist Ringisom. mit $f(1)=1$ dh. $f: A \to B$ bijektiv mit $f(a_1+a_2) = f(a_1)+f(a_2)$, $f(a_1 \cdot a_2) = f(a_1)\cdot f(a_2)$ und $f(1)=1$]

Nämlich genauer: Boolesche Algebra A isomorph zur Unteralgebra der offen-abgeschlossenen Teilmengen des Stoneschen Raumes $S(A)$, der widerum eine Unteralgebra von $(\mathcal{P}(A), \cap, \cup)$ ist. $\mathcal{P}(A)$ auffassen als $\prod_{a \in A} \{0,1\}$ [jede Teilmenge S von A mit ihrer charakteristischen Funktion $\chi_S: A \to \{0,1\}$ $\chi(x) = \begin{cases} 1 & x \in S \\ 0 & x \notin S \end{cases}$ identifizieren].

$\prod_{a \in A} \{0,1\}$ auffassen als Menge aller Funktionen $f: A \to \{0,1\}$ mit elem. weiser Addition und Mult. $S(A) = \{f: A \to \{0,1\} \mid f \text{ Ringhomo.}\}$
$= \{f: A \to \{0,1\} \mid f(a+b) = f(a)+f(b),\ f(a\cdot b) = f(a)\cdot f(b),\ f(1)=1\}$

2008-11-18

Gegeben Boolesche Algebra $(A, +, \cdot)$ [bzw. $(A, \wedge, \vee)$]. Dann ist A isomorph zu der Sub-Algebra der offen-abgeschlossenen Mengen des Stone-Raums $S(A)$ von A.

Definition: $(A,+,\cdot)$, $(B,+,\cdot)$ Boolesche Algebren. $f: A \to B$ heißt Homomorphismus Boolescher Algebren, wenn

1) $f(1)=1$
2) $f(a+b) = f(a)+f(b)$
3) $f(a \cdot c) = f(a)\cdot f(c)$

Bijektiver Homom. heißt Isomorphismus.

Definition: Stone-Raum: $(A,+,\cdot)$ Boolesche Alg. $S(A) = \mathrm{Hom}(A, \{0,1\})$ Menge der Homomorphismen Boolescher Algebren $f: A \to \{0,1\}$ mit Addition und Multiplikation

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x)$$

Dieser Raum $S(A)$ hat Topologie geerbt von der Produkttopologie von $\prod_{a\in A}\{0,1\}$.

Dh. eine Menge $s \subseteq S(A)$ heißt offen, wenn sie Durchschnitt einer offenen Menge in $\prod_{a\in A}\{0,1\}$ mit $S(A)$ ist, dh.

$\exists\, O$ offen $\subseteq \prod_{a\in A}\{0,1\}$ mit $O \cap S(A) = s$.

In $\prod_{a\in A}\{0,1\}$ sind die offenen Mengen genau die Vereinigungen bel. vieler offenen Basismengen, wobei die offenen Basismengen genau die Mengen der Form für gewisse endlich viele $a_1, \dots, a_n \in A$, $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ jeweils 0 oder 1.

$O = \{ (x_a)_{a\in A} \in \prod_{a\in A}\{0,1\} \mid x_{a_1} = \varepsilon_{a_1}, \dots, x_{a_n} = \varepsilon_{a_n} \}$

In dieser Topologie sind die offenen Basismengen gleichzeitig abgeschlossen [und das sind schon alle offen-abgeschlossenen Mengen $\subseteq S(A)$].

Die offenen-abgeschl. Mengen von $S(A)$ bilden Sub-Algebra [nach Axiomen der Topologie ist Menge der offen-abg. Mengen bzgl. $\cap, \cup$ (nur endl. viele) abgeschlossen]

Isomorphismus $\varphi : A \to$ Subalg. der offen-abg. Teilmengen v. $S(A)$ geg. durch $\varphi(a) = \{ f \in S(A) \mid f(a) = 1\}$ [das ist offensichtlich offene Basismenge von $S(A)$]. Man bekommt alle offenen Basismengen (dh. φ surjektiv), sei nämlich

$O = \{ f \in S(A) \mid f(a_1) = \dots = f(a_n) = 1,\ f(b_1) = \dots = f(b_k) = 0 \}$ dann

$O = \{ f \mid f(c) = 1\}$ für $c = (a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n) \wedge (b_1^c \wedge b_2^c \wedge \dots \wedge b_k^c)$

Prädikatenlogik – Sprachen erster Ordnung

Definition: Alphabet einer Sprache erster Ordnung besteht aus:

1) $\mathcal{V} = \{v_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ abzählbar unendl. viele Variable
2) $\{(,), \wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ (bzw. (,) und eine Menge von Junktoren J sodass A_J, Sprache der Aussagenlogik m. Junktoren aus J, vollständig ist,
3) $\{\forall, \exists\}$ Quantoren
4) $\forall n \in \mathbb{N}$: $\mathcal{F}_n$ eine (höchstens) abzählbare Menge von Funktionssymbolen.
5) $\forall n \in \mathbb{N}$: $\mathcal{R}_n$ eine (höchstens) abzählbare Menge von Relationssymbolen.

   [abzählbar heißt: $\emptyset$ oder endlich oder abzählbar unendlich]
6) in einer Sprache mit "=" muss in $\mathcal{R}_2$ das Symbol "=" vorkommen.
7) $\mathcal{C}$ eine Menge von Konstanten (-Symbolen)

   [könnte auch $\mathcal{C} = \mathcal{F}_0$ als Menge der 0-stelligen Funktionssymbole einführen]

Alphabet B ist disjunkte Vereinigung der in 1) – 7) genannten Mengen.

Definieren zuerst Subformeln (die in einem Modell „Elemente" bezeichnen sollen) nämlich Terme.

Definition: Die Menge der Terme der Sprache L, $T(L)$ def. als die kleinste Teilmenge von B^* (= {Worte mit Buchstaben $\in B$, B Alphabet von L}) die

1) alle Variablen und Konstanten von L enthält
2) abgeschlossen ist bzgl. der Relationen $(t_1, \dots, t_n, f t_1 \dots t_n)$ für $f \in \mathcal{F}_n$

(Abgeschlossenheit einer Menge $M \subseteq B^*$ bzgl. dieser Relation heißt: $\forall n \in \mathbb{N}: \ \forall f \in \mathcal{F}_n: t_1, \dots, t_n \in M \Rightarrow f\, t_1 \dots t_n \in M$)

$T(L)$ kleinste Menge die $\mathcal{V}, \mathcal{C}$ enthält und bzgl. dieser Rel. abgeschl.: formal def. als Durchschnitt aller $M \subseteq B^*$ mit $\mathcal{V} \cup \mathcal{C} \subseteq M$ und M abg. bzgl. der Rel. geg. durch $f \in \mathcal{F}_n$ wie oben.

Terme der Sprache L erfüllen eindeutige Losbarkeit, dh. $t \in T(L)$, dann gilt genau einer der Fälle:

1) $t \in \mathcal{V}$
2) $t \in \mathcal{C}$
3) $\exists n \in \mathbb{N}: \exists f \in \mathcal{F}_n \ \exists t_1, \dots, t_n \in T(L)$ mit $t = f\, t_1, \dots, t_n$

und im Fall 3 sind $n, f, t_1, \dots, t_n$ eind. bestimmt.

Da $\mathcal{V} \cap \mathcal{C} \cap (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n) = \emptyset$ und für $n \neq m$ $\mathcal{F}_n \cap \mathcal{F}_m = \emptyset$ schließen sich Fälle 1,2,3 gegenseitig aus und im Fall 3 sind f, n eind. Einzig mögliche Mehrdeutigkeit wäre $f t_1 \dots t_n = f s_1 \dots s_n$ t_i, s_i Terme k minimal mit $t_k \neq s_k$ dann ist t_k ein echter Anfangsabschnitt von s_k (oder umgekehrt).

Lemma: Kein Anfangsabschnitt eines Terms ist selbst Term.

Beweis: führen ganzzahlige Gewichte ein

für $v \in \mathcal{V}$ $\ w(v) = 1$, für $c \in \mathcal{C}$ $\ w(c) = 1$

für $f \in \mathcal{F}_n$ $\ w(f) = 1 - n$

und definieren das Gewicht eines Wortes $b_1 \dots b_m$ (b_i Buchstabe $\in \mathcal{V} \cup \mathcal{C} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n$) ist $\sum_{i=1}^{m} w(b_i)$.

Dann gilt: $\forall t \in T(L)$ $\ w(t) = 1$ und für jeden echten Anfangsabschn. a eines Terms ist $w(a) < 1$.

Zeigen $w(t) = 1$ für Term t mit Ind. nach Struktur:

Fall $t \in V$ ✓

Fall $t \in C$ ✓

Fall $t = f t_1 \ldots t_n$ $f \in F_n$ $t_1, \ldots, t_n$ Terme

IV $w(t_i) = 1$ $i = 1 \ldots n$. Da $w(f) = 1 - n$

ist $w(t) = w(f) + w(t_1) + \ldots + w(t_n) = 1$

Echte Anfangsabschnitte eines Terms t

Fall $t \in V$ oder $t \in C$: $\nexists$ echter Anfangsabschn.

Fall $t = f t_1 \ldots t_n$: Anfangsabschn. $a = f$ $w(a) = 1 - n \leq 0$

Anfangsabschnitt $a = f t_1 \ldots t_k s_{k+1}$ s_{k+1} ist echter

Anfangsabschnitt von t_{k+1} oder $k+1 < n$ und $s_{k+1} = t_{k+1}$

dann $w(a) = (1 - n) + w(t_1) + \ldots + w(t_k) + w(s_{k+1})$

$= (1 - n) + k + w(s_{k+1})$

und entweder $w(s_{k+1}) < 1$ oder $w(s_{k+1}) = 1$ und $k+1 < 1$

In jedem Fall: $w(a) < 1$.

Durch eindeutige Lesbarkeit von Termen ist für jeden Term auch eine „Höhe" definiert für $t \in V \cup C$: Höhe 0 für $t = f t_1 \ldots t_n$ $h(f) := \max\{h(t_1), \ldots, h(t_n)\} + 1$

D.h. Anzahl der Schritte, die man braucht, um diesen Term schrittweise aus vorhandenen k Termen und einem davorgestellten k-stelligen Funktionssymbol zu konstruieren.