Zeigen $w(t)=1$ für Term t mit Ind. nach Struktur:

Fall $t \in V$ ✓

Fall $t \in C$ ✓

Fall $t = f t_1 \dots t_n$ $f \in F_n$ $t_1, \dots, t_n$ Terme

IV $w(t_i) = 1$ $i = 1 \dots n$. Da $w(f) = 1-n$

ist $w(t) = w(f) + w(t_1) + \dots + w(t_n) = 1$

Echte Anfangsabschnitte eines Terms t

Fall $t \in V$ oder $t \in C$: $\nexists$ echter Anfangsabschn.

Fall $t = f t_1 \dots t_n$: Anfangsabschn. $a = f$ $w(a) = 1-n \leq 0$

Anfangsabschnitt $a = f t_1 \dots t_k s_{k+1}$ s_{k+1} ist echter Anfangsabschnitt von t_{k+1} oder $k+1 < n$ und $s_{k+1} = t_{k+1}$

dann $w(a) = (1-n) + w(t_1) + \dots + w(t_k) + w(s_{k+1})$

$= (1-n) + k + w(s_{k+1})$

und entweder $w(s_{k+1}) < 1$ oder $w(s_{k+1}) = 1$ und $k+1 < 1$

In jedem Fall: $w(a) < 1$.

Durch eindeutige Lesbarkeit von Termen ist für jeden Term auch eine „Höhe" definiert für $t \in V \cup C$: Höhe 0 für $t = f t_1 \dots t_n$ $h(f) := \max\{h(t_1), \dots, h(t_n)\} + 1$

D.h. Anzahl der Schritte, die man braucht, um diesen Term schrittweise aus vorhandenen k Termen und einem davor gestellten k-stelligen Funktionssymbol zu konstruieren.

2008-11-25

Korrektur zum Satz von Stone:

A Boolesche Algebra, $S(A) = \mathrm{Hom}(A, \{0,1\})$. $S(A)$ ist keine Boolesche Algebra bzgl. $+, \cdot$. Aber egal, $S(A)$ wird nur als Menge (mit einer Topologie) benötigt; A isomorph zu einer Unteralgebra von $(\mathcal{P}(S(A)), \cap, \cup)$ nämlich zur

Unteralgebra der offen-abg. Teilmengen von $S(A)$ [bzgl. Top, die $S(A)$ von Produkttop. von $\prod_{\alpha\in A}\{0,1\} = \{0,1\}^A$ erbt].

Letztes Mal „Terme" in Präfix Notation definiert, umgangsspr. schreibt man auch $f(a, g(b))$ für $fagb$ (f 2-stelliges, g 1-stelliges Funktionssymbol, a,b Konstanten) bzw. $a+b$ für $+ab$ etc.

Induktive Def. der Formeln der Sprache $\mathcal{L}$:

1) eine atomare Formel ist $R\,t_1 t_2 \ldots t_n$ wobei R n-stelliges Relationssymbol, $t_1, \ldots, t_n$ Terme.
2) A, B Formeln, dann auch $(\neg A)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \Rightarrow B)$, $(A \Leftrightarrow B)$
3) A Formel, und $v_i \in V$ Variable, dann $\exists v_i\, A$ und $\forall v_i\, A$ Formeln.

Die Sprache $\mathcal{L}$ ist die kleinste Menge von Wörtern, die die atomaren Formeln enthält und bzgl. d. Konstruktionen abgeschlossen ist. (Durchschnitt aller solcher Mengen)

Struktur zu einer Sprache $\mathcal{L}$:

$\mathcal{M} = (M$, Relationen, Funktionen, Konstanten$)$

wobei M nichtleere Menge und eine Zuordnung zu jeder Konstante $c \in \mathcal{L}$ ein Element $\bar{c} \in M$, zu jedem n-stelligen Funktionssymbol f von $\mathcal{L}$ eine Funktion $\bar{f}: M^n \to M$, zu jedem n-stelligen Relationssymb. R von $\mathcal{L}$ eine n-stellige Relation $\bar{R} \subseteq M^n$ existiert.

Wenn $\mathcal{L}$ Sprache mit „=" dann soll diesem Symbol die Gleichheitsrelation (Diagonale von M^2) zugeordnet werden.

Beispiele: $(\mathbb{N}, \leq, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, \leq, +, \cdot)$, $(\mathbb{Z}, \leq, +, \cdot)$ Strukturen für eine Sprache $\mathcal{L}$ mit 1 2-stelligen Relationssymbol und 2 2-stelligen Funktionssymbolen

Freie und gebundene Variablen in Formeln von $\mathcal{L}$

frei

Beispiel: $\exists x\, ((x \leq y) \wedge \forall z\, (z \cdot x = x))$

gebunden gebunden gebunden gebunden

frei

Beispiel: $\forall x\, (\neg (y < y) \wedge \forall y\, (y = y))$

gebunden gebunden

Beispiel: $\exists y\, (\forall x\, (x \leq y))$ Aussage ohne freie Variable
„geschlossene" Formel ~ interpretierbar als Aussage über eine Struktur

Beispiel: $\forall x\, (x \leq y)$ Aussage über ein bestimmtes Element einer Struktur interpretierbar, je nachdem, was man für y einsetzt.

Definition: Die freien Vorkommen der Variable v in einer Formel $\mathcal{F} \in \mathcal{L}$ sind:

1) wenn $\mathcal{F}$ atomar, dann alle Vorkommen von v in $\mathcal{F}$ frei.
2) wenn $\mathcal{F} = (\neg G)$ oder $\mathcal{F} = (G * H)$, $*$ Junktor, dann sind die freien Vorkommen von v in $\mathcal{F}$ genau die freien Vorkommen von v in G bzw. G und H.
3) wenn $\mathcal{F} = \forall w A$ oder $\mathcal{F} = \exists w A$ und w eine andere Variable als v, dann sind die freien Vorkommen von $\mathcal{F}$ genau diejenigen in A.
4) $\mathcal{F} = \exists v A$ oder $\mathcal{F} = \forall v A$ dann ist kein Vorkommen von v in $\mathcal{F}$ frei.

„nicht frei" synonym mit „gebunden".
Eine Var. kann in einer Formel sowohl freie als auch gebundene Vorkommen haben.

Die freien Variablen einer Formel F sind diejenigen Var, die in F mind. ein freies Vorkommen haben.
$F = F[v_1, v_2, v_3]$ soll heißen keine Var. außer v_1, v_2, v_3 in F frei vorkommend.
Analog für Terme $t = t[v_1, \dots, v_n]$ heißt in t kommen höchstens die Var. $v_1, \dots, v_n$, keine weiteren, vor. Geschlossener Term: Term ohne Variablen (gibt es nur in Sprachen mit Konstanten). Geschlossene Formel: Formel ohne freie Variable.

Jedes gebundene Vorkommen einer Var. in einer Formel ist genau von einem Quantor gebunden:

Definition: Bindungsbereich eines Quantors $Q \in \{\forall, \exists\}$. Bindungsbereich von Q in QvF sind genau alle freien Vorkommen von v in F sowie das v, das unmittelbar auf Q folgt.
Und Bindungsbereich aller Quantoren in F der Form $(\neg G)$, $(G * H)$ ist genau der Bindungsbereich des Quantors in der Subformel G bzw. H, in der er vorkommt. (Atomare Terme haben keine Quantoren)

Bemerkung: haben verwendet: eindeutige Lesbarkeit von Formeln $\in \mathcal{L}$ einer Sprache erster Ordnung.

Interpretation von Termen und Formeln in einer Struktur

Gegeben Sprache $\mathcal{L}$ und dazupassende Struktur $\mathcal{M}$ dann interpretiert man Variable als Elemente von M (der Grundmenge von $\mathcal{M}$) und kann dadurch jedem Term ein El von M zuordnen.

Definition: t Term, $t = t[v_1, .., v_n]$. Unter der Interpretation von v_i als $m_i \in M$ (für gewisse $m_1, .., m_n \in M$) interpretiert man t wie folgt:

1) t eine Konstante c: interpretiert als $\bar{c} \in M$ [die Zuordnung von Konstantensymb. $\in \mathcal{L}$ zu El. von M ist mit Struktur gegeben]
2) t eine Var. v_i $(1 \leq i \leq n)$ interpretieren als m_i
3) $t = f t_1, ..., t_n$ interpretieren als $\bar{f}(\bar{t}_1, ..., \bar{t}_n)$ wobei $\bar{t}_i$ die Interpretation von t_i und $\bar{f}: M^n \to M$ die in der Struktur dem Symbol f zugeordnete Funktion.

Schreibt $\bar{t}^{(M, v_1 \to m_1, .., v_n \to m_n)}$ bzw. $\bar{t}^M$ bzw. $\bar{t}$ für die Interpretation von t in M (abh. von einer Interpretation der in t vorkommenden Var. als El. von M $(v_1 \to m_1, .., v_n \to m_n)$

Interpretieren Formeln als Aussagen über die Struktur (im Fall einer geschlossenen Formel) bzw. als Aussagen über Elemente der Grundmenge der Struktur (im Fall einer Formel mit freien Var.) und definieren, wann $\mathcal{M}$ eine Aussage erfüllt:

Definition: Geg. $\mathcal{L}$ Sprache, $\mathcal{M}$ Struktur dazu, eine Interpretation der Var. $v_1, ..., v_n$ als Elemente $m_1, .., m_n$ $(v_1 \to m_1, .., v_n \to m_n)$ interpretieren wir Formeln, die außer $v_1, .., v_n$ keine freien Var. enthalten:

1) wenn F atomare Formel $F = R t_1 \ldots t_k$:
$\mathcal{M}(v_1 \to m_1, .., v_n \to m_n) \models F$ genau dann, wenn $(\bar{t}_1, .., \bar{t}_n) \in \bar{R}$
Die Struktur $\mathcal{M}$ unter der Interpretation von v_i als a_i $(1 \leq i \leq n)$ erfüllt F genau dann, wenn die Interpretation $\bar{t}_1, .. \bar{t}_n$ der Terme t_i in Relation $\bar{R}$ stehen ($\bar{R}$ die dem Symbol R von $\mathcal{L}$ zugeordn. Relation)

2) • $F = \neg G$ dann $\mathcal{M}(v_i \to a_i, i = 1..n) \models F$ genau dann, wenn $\mathcal{M}(v_i \to a_i\ i = 1..n) \not\models G$. $\not\models$ heißt „erfüllt nicht", Verneinung von $\models$

• Wenn $F = (G \wedge H)$ dann $\mathcal{M}(v_i \to m_i\ i = 1..n) \models F$ genau dann, wenn $\mathcal{M}(v_i \to m_i) \models G \quad \wedge \mathcal{M}(v_i \to m_i) \models H$

• Wenn $F = (G \to H)$ dann $\mathcal{M}(..) \models F$ gdw. $\mathcal{M}(..) \not\models G \vee \mathcal{M}(..) \models H$.

• etc..

3) • $F = \forall x\, G$, x eine Var. $\notin \{v_1, .., v_n\}$: $\mathcal{M}(..) \models F$ gdw.
$\forall a \in M : \mathcal{M}(x \to a, v_1 \to m_1, ..., v_n \to m_n) \models G$.

• $F = \exists x\, G$: $x \notin \{v_1, .., v_n\}$: $\mathcal{M}(..) \models F$ gdw.
$\exists a \in M : \mathcal{M}(x \to a, v_1 \to m_1, ..., v_n \to m_n) \models G$.

• $F = \forall v_i\, G$ dann $\mathcal{M}(..) \models F$ gdw.
$\forall a \in M : \mathcal{M}(v_j \to m_j\ (j \neq i, 1 \leq j \leq n), v_i \to a) \models G$

• $F = \exists v_i\, G$ dann $\mathcal{M}(..) \models$ gdw.
$\exists a \in M : \mathcal{M}(v_i \to a, v_j \to m_j\ (j \neq i, 1 \leq j \leq n)) \models G$.