2) • $F = \neg G$ dann $\mathcal{M}(v_i \to a_i, i=1..n) \models F$ genau dann, wenn $\mathcal{M}(v_i \to a_i\ i=1..n) \not\models G$. $\not\models$ heißt „erfüllt nicht", Verneinung von $\models$

• Wenn $F = (G \wedge H)$ dann $\mathcal{M}(v_i \to m_i\ i=1..n) \models F$ genau dann, wenn $\mathcal{M}(v_i \to m_i) \models G \quad \wedge \mathcal{M}(v_i \to m_i) \models H$

• Wenn $F = (G \to H)$ dann $\mathcal{M}(..) \models F$ gdw. $\mathcal{M}(..) \not\models G \vee \mathcal{M}(..) \models H$.

• etc..

3) • $F = \forall x\, G$, x eine Var. $\notin \{v_1, \dots, v_n\}$: $\mathcal{M}(..) \models F$ gdw.
$\forall a \in M: \mathcal{M}(x \to a, v_1 \to m_1, \dots, v_n \to m_n) \models G$.

• $F = \exists x\, G$: $x \notin \{v_1, \dots, v_n\}$: $\mathcal{M}(..) \models F$ gdw.
$\exists a \in M: \mathcal{M}(x \to a, v_1 \to m_1, \dots, v_n \to m_n) \models G$.

• $F = \forall v_i\, G$ dann $\mathcal{M}(..) \models F$ gdw.
$\forall a \in M: \mathcal{M}(v_j \to m_j\ (j \neq i, 1 \le j \le n), v_i \to a) \models G$

• $F = \exists v_i\, G$ dann $\mathcal{M}(..) \models$ gdw.
$\exists a \in M: \mathcal{M}(v_i \to a, v_j \to m_j\ (j \neq i, 1 \le j \le n)) \models G$.

2008-12-02

Di 9.12. entfällt VO. Nachholung Fr. 16.1. 14-16 ; 12 (nicht 5.12)

Haben definiert, wenn $F \in \mathcal{L}$ (Formel $\in$ Sprache $\mathcal{L}$) in einer Interpretation von $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}(x_i \to a_i, i=1, \dots, n)$ [$\mathcal{M}$ $\mathcal{L}$-Struktur $\{x_1, \dots, x_n\}$ umfasst alle in F freien Var] gilt, geschrieben $\mathcal{M}(x_i \to a_i, i=1 \dots n) \models F$. Abgekürzte Schreibweise, $\mathcal{M} \models F[a_1, \dots, a_n]$ wenn klar ist $F = F[x_1, \dots, x_n]$ (Obermenge der in F frei vorkommenden Var, und deren Reihenfolge ist fix $x_1, \dots, x_n$)

Definition: Eine Formel in der keine Var. frei vorkommt, heißt geschlossen.

Aus der Definition folgt auch eine Def. von $\mathcal{M} \models F$ für $\mathcal{M}$ $\mathcal{L}$-Struktur, $F \in \mathcal{L}$ geschlossen [braucht keine Var. interpretieren, ϕ ist Obermenge der in F frei vorkommenden Var.]

Wenn $\mathcal{M} \models$ sagt man, $\mathcal{M}$ ist Modell von F, bzw. für Menge von geschlossenen Formeln $\phi \subseteq \mathcal{L}$ sagt man $\mathcal{M}$ ist Modell von ϕ ($\mathcal{M} \models \phi$) wenn $\forall F \in \phi: \mathcal{M} \models F$.

Definition: Seien $F, G \in \mathcal{L}$. Sagen G ist logische/semantische Folgerung von F, wenn für jede $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{M}$ mit $\mathcal{M} \models F$ auch $\mathcal{M} \models G$ gilt. F, G heißen logisch äquivalent wenn F logische Folgerung von G und umgekehrt.
Schreibt $F \overset{\text{\models}}{\models} G$ für G logische Folgerung von F; für logische Äquivalenz von F, G schreibt man $F \mathrel{=\!\!\mid\!\models} G$.

Eine Formel $F \in \mathcal{L}$ heißt allgemeingültig, wenn für jede $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{M}$ gilt $\mathcal{M} \models F$ und $F \in \mathcal{L}$ heißt erfüllbar, wenn eine Struktur existiert mit $\mathcal{M} \models F$.

Lemma: $F \models G$ genau dann, wenn $\models (F \to G)$.
Beweis: folgt aus Def. von $\models$. $\underline{(\Rightarrow):}$ Wenn $F \models G$ dh. jedes $\mathcal{M}$ mit $\mathcal{M} \models F$ erfüllt $\mathcal{M} \models G$. Jedes $\mathcal{M}$ erfüllt entweder F oder erfüllt F nicht. Im ersten Fall erfüllt $\mathcal{M}$ auch G, also $\mathcal{M} \models F \to G$, im zweiten ($\mathcal{M} \not\models F$) dann $\mathcal{M} \models F \to G$ nach def.
$\underline{(\Leftarrow)}$: Wenn $\models F \to G$ dann gilt für jedes $\mathcal{M}$ nach Def. von $\models$ dass $\mathcal{M} \not\models F$ oder $\mathcal{M} \models G$. Also für jene $\mathcal{M}$ mit $\mathcal{M} \models F$ folgt $\mathcal{M} \models G$.
Analog $F \mathrel{=\!\!\mid\!\models} G \iff \models (F \leftrightarrow G)$

Für Formel F mit freien Variablen $\mathcal{M} \models F$ definieren

$\mathcal{M} \models F$ genau dann, wenn $\mathcal{M} \models \overline{F}$, wobei $\overline{F}$ der universelle Abschluss von F ist. Wenn $x_1, \dots, x_n$ die freien Var. von F, dann $\overline{F} := \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n\, F$. Reihenfolge der x_i bis auf log. Äquiv. egal.

Dh. wenn $\{x_1, \dots, x_n\}$ die freien Var. von F, dann für jede Permutation π von $1, \dots, n$ $\forall x_{\pi(1)} \forall x_{\pi(2)} \dots \forall x_{\pi(n)}\, F$ logisch äquivalent zu $\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n\, F$.

Ähnlich wie in Aussagenlogik: wenn man nur mod. $\Dashv\models$ rechnet, kann man zB. Junktoren eliminieren, da zB. $F \Rightarrow G \Dashv\models (\neg F \vee G)$ etc. Klammern weglassen wegen Assoziativität von $\wedge, \vee$ da $(F \vee (G \vee H)) \Dashv\models ((F \vee G) \vee H)$ und man kann bis auf log. Äquivalenz $\forall$ durch Formeln mit $\exists, \neg$ umschreiben, da $\forall x\, F \Dashv\models \neg \exists x \neg F$

[Analog, wie in der Aussagenlogik manchmal nur modulo $\Leftrightarrow$ betrachtet haben]

Bemerkung: bei Formeln F, G mit freien Var. aufpassen:

$\models \overline{F} \Leftrightarrow \overline{G}$ (bzw. $\overline{F} \Dashv\models \overline{G}$) genügt nicht, damit $F \Dashv\models G$.

Ü: Gegenbeispiel.

Sequenzen Kalkül (nach Ebbinghaus, Flum, Thomas)

Gegeben Sprache $\mathcal{L}$, S Menge von Paaren (Γ, φ) wobei $\Gamma \in \mathcal{L}$, $\varphi \in \mathcal{L}$ schreibt das Paar als $\Gamma\ \varphi$.

Nennt $\Gamma\ \varphi$ eine Sequenz. S ist induktiv definiert als kleinste Menge von Sequenzen, die abgeschlossen ist bzgl. folgender Ableitungsregeln (wenn die Sequenzen oberhalb des Strichs in $\mathcal{L}$, dann auch die Sequenz unterhalb:

1) „Element": $\dfrac{}{\Gamma\ \varphi}$ wenn $\varphi \in \Gamma$

2) „Teilmenge": $\dfrac{\Gamma\ \varphi}{\Gamma'\ \varphi}$ wenn $\Gamma' \supseteq \Gamma$

3) „oder (vorne)"

$$\frac{\begin{array}{lll}\Gamma & \varphi & \chi \\ \Gamma & \psi & \chi\end{array}}{\Gamma\ (\varphi \vee \psi)\ \chi}$$

4) „oder (hinten)"

$$\frac{\Gamma\ \varphi}{\Gamma\ (\varphi \vee \psi)} \quad \text{und} \quad \frac{\Gamma\ \varphi}{\Gamma\ (\psi \vee \varphi)}$$

5) „Fallunterscheidung"

$$\frac{\begin{array}{lll}\Gamma & \psi & \varphi \\ \Gamma & \neg\psi & \varphi\end{array}}{\Gamma\ \ \varphi}$$

6) „Indirekter Beweis

$$\frac{\begin{array}{lll}\Gamma & \neg\varphi & \psi \\ \Gamma & \neg\varphi & \neg\psi\end{array}}{\Gamma\ \varphi}$$

7) „Gleichheit"

$$\frac{}{t = t} \quad t \text{ Term}$$

8) „Gleiches Einsetzen"

$$\frac{\Gamma\ \ \varphi(\frac{t}{x})}{\Gamma\ t \doteq t'\ \varphi(\frac{t'}{x})} \quad t \text{ eingesetzt für } x$$

9) „Existenzquantor (vorne)"

$$\frac{\Gamma\ \varphi(\frac{y}{x})\ \psi}{\Gamma\ \exists x\, \varphi\ \ \psi}$$

wenn y nicht frei in Γ, in $\exists x \varphi$ und in ψ.

10) „Existenzquantor (hinten)"

$$\frac{\Gamma\ \varphi(\frac{t}{x})}{\Gamma\ \exists x\, \varphi}$$

Definition des Einsetzens in eine Formel: $\varphi \in \mathcal{L}$, t Term von $\mathcal{L}$, dann soll $\varphi(\frac{t}{x})$ (bzw. $\varphi(t/x)$) die Formel $\in \mathcal{L}$ bezeichnen, die man durch simultanes Einsetzen von t für alle freien Vorkommen von x in φ erhält, analog $\varphi(t_1/x_1, t_2/x_2, \dots t_n/x_n)$ bezeichnet simultanes Einsetzen von t_i für alle freien Vorkommen von x_i.

Formale Definition: Induktiv nach Struktur von φ.

Zum Sequenzenkalkül: nennen Sequenz $\Gamma\varphi$ korrekt, wenn $\Gamma \models \varphi$ (φ ist logische / semantische Folgerung von Γ), dh. wenn für jede Struktur $\mathcal{M}$ mit $\mathcal{M} \models \Gamma$ auch $\mathcal{M} \models \varphi$ gilt.
Für Ableitungsregeln zeigen: wenn alle Sequenzen oberhalb des Striches korrekt, dann auch jene unterhalb des Strichs.

Daraus folgt: alle Sequenzen $\in \mathcal{S}$ korrekt. Für $\Gamma\varphi \in \mathcal{S}$ schreibt man $\vdash_{\mathcal{S}} \Gamma\varphi$ bzw. $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$. Wegen Korrektheit gilt: wenn $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$ dann $\Gamma \models \varphi$.

Bemerkung: Sequenz $\emptyset\varphi$ wird als φ geschrieben.

Ableitung: $(\varphi \vee \neg\varphi)$ „tertium non datur" für bel. $\varphi \in \mathcal{L}$.

φ	φ	Element
φ	$(\varphi \vee \neg\varphi)$	oder hinten
$\neg\varphi$	$(\varphi \vee \neg\varphi)$	—"—
	$(\varphi \vee \neg\varphi)$	Fallunterscheidung

Schreibweise: schreibt endliche Mengen Γ einfach als Folge ihrer Elemente, schreibt Folgerungen ohne Strich unter die schon abgeleiteten Sequenzen, nur vor der letzten Sequenz Strich.

Kann auch zusätzliche „Regeln“ ableiten.

Beispiel: e falso quodlibet

$$\begin{array}{ll} \Gamma & \psi \\ \Gamma & \neg\psi \\ \hline \Gamma & \varphi \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \Gamma\ \psi & \text{Vor.} \\ \Gamma\ \neg\psi & \text{Vor.} \\ \Gamma\ \neg\varphi\ \psi & \text{Teilmenge} \\ \Gamma\ \neg\varphi\ \neg\psi & \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \supseteq \Gamma \\ \hline \Gamma\ \varphi & \text{indirekter Beweis} \end{array}$$

Beispiel: Kettenschluss

$$\begin{array}{lll} \Gamma & & \varphi \\ \Gamma & \varphi & \psi \\ \hline \Gamma & & \psi \end{array}$$

Dh. wenn $\Gamma\varphi \in S$, $\Gamma\varphi\psi \in S$, dann $\Gamma\psi \in S$

$$\begin{array}{llll} 1) & \Gamma & \varphi & \text{nach Vor.} \\ 2) & \Gamma\ \varphi & \psi & \text{nach Vor.} \\ 3) & \Gamma\ \neg\varphi & \varphi & \text{Teilmenge } \Gamma \supseteq \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \\ 4) & \Gamma\ \neg\varphi & \neg\varphi & \text{Element} \\ 5) & \Gamma\ \neg\varphi & \psi & \text{nach e falso quodlibet} \\ \hline & \Gamma & \psi & \text{nach Falluntersch. angew. auf 2,5} \end{array}$$