2009-01-20

Vollständigkeitssatz (Gödel, Bew. Skizze nach Henkin)

$\mathcal{L}$ fixe Sprache 1. Ordnung; Struktur für $\mathcal{L}$: Grundmenge M und für jedes n-stellige Funktionensymb. $f \in \mathcal{L}$ eine Funktion $\bar{f}: M^n \to M$; für jedes n-stellige Relationensymb. $R \in \mathcal{L}$ eine Relation $\bar{R} \subseteq M^n$.

Eine Struktur $\mathcal{M}$ von $\mathcal{L}$ heißt Modell einer Menge $\Phi \subseteq \mathcal{L}$ wenn $\mathcal{M}$ alle $\varphi \in \Phi$ erfüllt. Schreibt: $\mathcal{M} \models \Phi$

Wenn Φ Menge von Formeln $\subseteq \mathcal{L}$, φ eine Formel $\in \mathcal{L}$, schreibt $\Phi \models \varphi$ für: $\forall \mathcal{M}$ Modell mit $\mathcal{M} \models \Phi$ gilt $\mathcal{M} \models \varphi$

Haben Sequenzenkalkül S und formale Ableitungen von Sequenzen in S definiert und zwar so, dass wenn $\Gamma\varphi$ in S ableitbar ist (Γ endl. Folge von Formeln $\in \mathcal{L}$, $\varphi \in \mathcal{L}$), dann $\Gamma \models \varphi$

Schreibt $\vdash \Gamma\varphi$ für $\Gamma\varphi$ in S ableitbar.

Für bel. Menge v. Formeln $\Phi \subseteq S$, $\varphi \in \mathcal{L}$ schreiben wir $\Phi \vdash \varphi$ wenn $\exists \Phi'$ endl. $\subseteq \Phi$ mit $\vdash \Phi'\varphi$. (Für endl. Mengen v. Formeln $\vdash \phi\varphi$ äquivalent zu $\phi \vdash \varphi$).

Korrektheit des Kalküls: es gilt:

$$\Phi \vdash \varphi \Rightarrow \Phi \models \varphi$$

Vollständigkeitssatz:

V1: $\Phi \models \varphi \iff \Phi \vdash \varphi$ [„$\Leftarrow$" Korrektheit des Kalküls, „$\Rightarrow$" Vollständigkeit des Kalküls

V2: Jede konsistente (widerspruchsfreie) Theorie (Menge v. Formeln) hat ein Modell

Φ konsistent heißt nicht nur, dass kein φ existiert mit $\varphi, \neg\varphi \in \Phi$ sondern dass kein φ existiert mit $\Phi \vdash \varphi$ und $\Phi \vdash \neg\varphi$.

Bsp: $\Phi = \{(\varphi \vee \psi), (\varphi \vee \neg\psi), \neg\varphi\}$

$\Phi \vdash \psi$, $\Phi \vdash \neg\psi$ nicht konsistent

Zeigen V2 $\Rightarrow$ V1: Ang. V2 gilt und sei Φ Menge von Formeln, φ eine Formeln, sodass $\Phi \models \varphi$ aber $\Phi \nvdash \varphi$.

Wegen $\Phi \models \varphi$ hat $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ kein Modell. $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ konsistent.

Ang. nicht konsistent, dann $\Phi \cup \{\neg\varphi\} \vdash \varphi$ und $\Phi \cup \{\varphi\} \vdash \varphi$.

Nach Regel „Fallunterscheidung": $\Phi \vdash \varphi$. Widerspruch.

Bew.-Skizze von V2

Geg. $\Phi \subseteq \mathcal{L}$. Konstruieren Struktur „Terminterpretation bzgl. Φ" $\mathfrak{I}_\Phi$

- Grundmenge: Äquivalenzklassen von Termen $\in \mathcal{L}$ bzgl. Äquivalenzrelation $\sim$: $t_1 \sim t_2 :\Leftrightarrow \Phi \vdash t_1 = t_2$.
  Bezeichnen mit $\bar{t}$ die Äquivalenzklasse von t bzgl. $\sim$.
- Einem Funktionssymb. f (n-stellig) $\in \mathcal{L}$ zuordnen Funktion $\bar{f}: \mathfrak{I}_\Phi^n \to \mathfrak{I}_\Phi$ durch $\bar{f}\bar{t}_1 \ldots \bar{t}_n := \overline{ft_1 \ldots t_n}$ (Wohldef.: $t_1 \sim t_1', \ldots, t_n \sim t_n'$ $\Rightarrow ft_1 \ldots t_n \sim ft_1' \ldots t_n'$)
- Für n-st. Relationssymb. R def. n-st. Rel. $\bar{R} \subseteq \mathfrak{I}_\Phi^n$:
  $\bar{R}\bar{t}_1 \ldots \bar{t}_n$ (formal $(\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_n) \in \bar{R}$) $:\Leftrightarrow \Phi \vdash Rt_1 \ldots t_n$ (wohldef: $t_1 \sim t_1', \ldots, t_n \sim t_n'$ dann $\Phi \vdash Rt_1 \ldots t_n \Leftrightarrow \Phi \vdash Rt_1' \ldots t_n'$)

Definition: Eine Theorie Φ heißt vollständig (negationstreu), wenn $\forall \varphi \in \mathcal{L}$ ($\Phi \vdash \varphi$ oder $\Phi \vdash \neg\varphi$).

Definition: Eine Theorie Φ heißt Henkin-Theorie, wenn gilt: für jede Formel $\in \mathcal{L}$ der Gestalt $\exists x \varphi$ existiert ein Term t sodass $\Phi \vdash (\exists x \varphi \to \varphi(t/x))$. Dh. zu jeder Existenzaussage in Φ gibt es einen „Zeugen" (ein Beispiel).

Satz: Für jede konsistente, vollständige Henkin-Theorie Φ gilt:
$\mathfrak{J}_\Phi \models \Phi$; insbes: jede kons., vollst. Henkin-Th. hat Modell!

Bemerkung: Aus Def. $\mathfrak{J}_\Phi$ folgt für bel. kons. Theorie Φ
für bel. atomare Formeln φ : $\Phi \vdash \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{J}_\Phi \models \varphi$

Vollständigkeit von Φ liefert die Analogie von $\Phi \vdash \varphi \vee \Phi \vdash \neg\varphi$
zu $\mathfrak{J}_\Phi \models \varphi \vee \mathfrak{J}_\Phi \models \neg\varphi$ und erlaubt es, die Äquivalenz $\Phi \vdash \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{J}_\Phi \models \varphi$
fortzusetzen auf Formeln der Gestalt $\varphi \vee \psi$, $\neg\varphi$, $\varphi \wedge \psi$, ...
Schließlich Fortsetzbarkeit d. Äquivalenz auf Formeln der
Gestalt $\exists x \varphi$ durch Henkin-Eigenschaft.

Nachdem Satz v. Henkin bewiesen ist, folgt VZ durch Einbettung
einer bel. konsistenten Theorie in eine konsistente, vollständige
Henkin-Theorie.