Kap 7: Determinanten

• Eine (quadratische) Matrix $A \in M(n \times n, K)$ können wir in der Form $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ a_n \end{pmatrix}$ schreiben, wobei a_i den i-ten Zeilenvektor von A bezeichnet.

Definition. Eine Abbildung $det : M(n \times n, K) \to K$ heißt Determinante, wenn

(D1) det "linear in jeder Zeile ist", d.h. ist $a_i = a_i' + a_i''$ bzw. $a_i = \lambda a_i'''$, dann ist

$$\det \begin{pmatrix} . \\ . \\ a_i \\ . \\ . \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} . \\ . \\ a_i' \\ . \\ . \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} . \\ . \\ a_i'' \\ . \\ . \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \det \begin{pmatrix} . \\ . \\ a_i \\ . \\ . \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} . \\ . \\ a_i''' \\ . \\ . \end{pmatrix} ,$$

(D2) det "alternierend" ist, d.h. gilt $a_i = a_j$ für $i \neq j$, dann ist $detA = 0$,

(D3) $detE_n = 1$ ist.

• Aus den definierenden Eigenschaften einer Determinante können nun weitere Eigenschaften hergeleitet werden.

(D4) $\forall\ \lambda \in K\ :\ det(\lambda A) = \lambda^n detA$,

(D5) Gilt $a_i = 0$ (Nullvektor), dann ist $detA = 0$,

(D6) B entstehe aus A durch Vertauschen der i-ten und j-ten Zeile $(i \neq j) \Rightarrow$ $detB = -detA$,

(D7) B entstehe aus A durch Addition der λ-fachen j-ten Zeile zur i-ten Zeile $(i \neq j)$ $\Rightarrow detB = detA$,

(D8) Ist A eine obere (bzw. untere) Dreiecksmatrix mit Diagonalelementen $\lambda_1, ..., \lambda_n$, dann ist $detA = \lambda_1 \lambda_2 ... \lambda_n$,

(D9) $detA = 0 \Leftrightarrow a_1, a_2, ..., a_n$ sind linear abhängig,

(D10) $detA \neq 0 \Leftrightarrow A$ ist invertierbar,

(D11) $det(AB) = detA.detB$.

Somit gilt für eine invertierbare Matrix A : $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$.

- **Permutationen**

Es sei $S_n = \{\sigma : \{1,2,...,n\} \to \{1,2,...,n\} \ : \ \sigma$ ist bijektiv$\}$ die symmetrische Gruppe (vom Index n). Die Elemente von S_n heißen Permutationen.

$\tau \in S_n$ heißt Transposition, wenn τ zwei (verschiedene) Elemente vertauscht und die übrigen fest läßt, d.h. $\exists \ k \neq l \in \{1,2,...,n\}$ mit $\tau(k) = l$, $\tau(l) = k$ und $\tau(i) = i$ für $i \neq k, l$.
Ist $\tau \in S_n$ eine Transposition, dann gilt offenbar $\tau = \tau^{-1}$.

Es gilt: Jedes $\sigma \in S_n$ kann in der Form $\sigma = \tau_1\tau_2...\tau_k$ dargestellt werden, wobei die τ_i Transpositionen sind.

Ein Paar $i, j \in \{1,2,...,n\}$ heißt Fehlstand einer Permutation σ , wenn $i < j$ und $\sigma(i) > \sigma(j)$ ist. Das Signum (Vorzeichen) von σ , sign σ , ist $+1$, wenn σ eine gerade Anzahl von Fehlständen hat, und sonst -1 .
σ heißt gerade (bzw. ungerade) wenn sign $\sigma = +1$ (bzw. sign $\sigma = -1$).

Es gilt: sign $\sigma = \prod\limits_{i<j} \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}$ sowie sign $(\tau \circ \sigma) =$ sign τ . sign σ .
Im besonderen ist das Signum einer Transposition -1 , und für eine Permutation $\sigma = \tau_1\tau_2...\tau_k$ (τ_i Transpositionen) gilt: sign $\sigma = (-1)^k$.

Die Menge der geraden Permutationen $A_n = \{\sigma \in S_n \ : \ \text{sign } \sigma = +1\}$ bildet eine Gruppe bzgl. der Kompostion von Abbildungen und heißt die alternierende Gruppe.
Für $\tau \in S_n$ mit sign $\tau = -1$ erhalten wir eine disjunkte Zerlegung $S_n = A_n \cup A_n\tau$.

- **Satz.** Die Abbildung det ist eindeutig bestimmmt und hat für $A \in M(n \times n, K)$ die Form $\det A = \sum\limits_{\sigma \in S_n} sign\sigma . a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}...a_{n\sigma(n)}$.

Daraus ergibt sich etwa für die Determinante einer 2×2 Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ sofort die Formel $detA = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.
Die Determinante einer 3-reihigen Matrix kann einfach mit der Regel von Sarrus bestimmt werden.
Aus dem obigen Satz folgt weiters, daß $det({}^tA) = detA$ ist. Somit erhalten wir analoge Aussagen bei elementaren Zeilenumformungen einer Matrix.

- **Die komplementäre Matrix**

Es sei $A \in M(n \times n, K)$.
Für festes $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ ersetzen wir das Element a_{ij} durch 1 und alle übrigen Elemente der i-ten Zeile und j-ten Spalte durch 0 . Die entstehende Matrix werde mit A_{ij} bezeichnet. Die $(n-1) \times (n-1)$ Matrix, die durch Streichung der i-ten Zeile und j-ten Spalte aus A hervorgeht, werde mit A'_{ij} bezeichnet.
Dann gilt: $detA_{ij} = (-1)^{i+j} detA'_{ij}$.

Setzt man $c_{ij} = detA_{ij} \ \ \forall \ i, j \in \{1, 2, ..., n\}$, dann heißt $\tilde{A} =^t (c_{ij})$ die zu A komplementäre Matrix.

Satz. $\tilde{A}.A = A.\tilde{A} = (detA)E_n$.

Ist also A invertierbar, dann gilt $A^{-1} = \frac{1}{detA}\tilde{A}$. Speziell für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ erhalten wir also $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

- **Der Entwicklungssatz von Laplace**

Sei $A \in M(n \times n, K)$.
Für jedes $i \in \{1, 2, ..., n\}$ gilt: $\det A = \sum\limits_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A'_{ij}$
(Entwicklung nach der i-ten Zeile)

Für jedes $j \in \{1, 2, ..., n\}$ gilt: $\det A = \sum\limits_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A'_{ij}$
(Entwicklung nach der j-ten Spalte)

- **Die Cramer'sche Regel**

Gegeben sei ein inhomogenes lineares Gleichungssystem $Ax = b$, wobei $A \in M(n \times n, K)$ invertierbar ist. Dann sind die Komponenten der (eindeutig bestimmten) Lösung x durch $x_i = \frac{\det(a^1, ..., a^{i-1}, b, a^{i+1}, ..., a^n)}{\det A}$ gegeben.