

Kap 4: Lineare Abbildungen und Matrizen

- **Koordinatensysteme**

Es sei V ein K -Vektorraum mit $\dim V = n$, und $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ sei eine Basis in V . Dann gibt es für jedes $v \in V$ genau ein n -Tupel $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in K^n$ sodaß $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$.

Die zugehörige Abbildung $\Phi_{\mathcal{B}} : K^n \rightarrow V$ mit $\Phi_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$ ist ein Isomorphismus, und heißt auch Koordinatensystem in V .

Zu $v \in V$ heißt $x = (x_1, \dots, x_n) = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v)$ der Koordinatenvektor von v bzgl. \mathcal{B} .

- Wir betrachten nun die folgende

Grundsituation. V und W sind K -Vektorräume mit $\dim V = n$ und $\dim W = m$.

$\mathcal{A} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ ist Basis von V , $\mathcal{B} = (w_1, w_2, \dots, w_m)$ ist Basis von W .

1. Die einer Matrix zugeordnete lineare Abbildung

Sei $A = (a_{ij})$ eine $m \times n$ Matrix. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $F : V \rightarrow W$ mit

$$F(v_1) = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \dots + a_{m1}w_m$$

$$F(v_2) = a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \dots + a_{m2}w_m$$

.....

$$F(v_n) = a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \dots + a_{mn}w_m$$

D.h. der Koordinatenvektor von $F(v_j)$ bzgl. der Basis \mathcal{B} ist die j -te Spalte von A .

Man schreibt auch $L_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(A) = F$.

Auf diese Weise wird eine Abbildung $L_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} : M(m \times n; K) \rightarrow \text{Hom}_K(V, W)$ definiert, wobei $A \mapsto L_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(A)$.

Spezialfall. Sei $V = K^n$, $W = K^m$ und \mathcal{K} bzw. \mathcal{K}' seien die kanonischen Basen in K^n bzw. K^m . Werden $x \in K^n$ und $y = F(x) = L_{\mathcal{K}'}^{\mathcal{K}}(A)(x) \in K^m$ als Spaltenvektoren geschrieben, dann können x bzw. y als $n \times 1$ bzw. $m \times 1$ Matrizen aufgefaßt werden

und es gilt $y = Ax$, d.h. y ist das Produkt der Matrizen A und x .

Wir betrachten nun die durch die Basen \mathcal{A} bzw. \mathcal{B} definierten Koordinatensysteme $\Phi_{\mathcal{A}} : K^n \rightarrow V$ und $\Phi_{\mathcal{B}} : K^m \rightarrow W$. Dann ist das folgende Diagramm kommutativ

$$\begin{array}{ccc} K^n & \xrightarrow{L_{\mathcal{K}'}^{\mathcal{K}}(A)} & K^m \\ \Phi_{\mathcal{A}} \downarrow & & \downarrow \Phi_{\mathcal{B}} \\ V & \xrightarrow{L_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(A)} & W \end{array}$$

d.h. $\Phi_{\mathcal{B}} \circ L_{\mathcal{K}'}^{\mathcal{K}}(A) = L_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(A) \circ \Phi_{\mathcal{A}}$ bzw. $L_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(A) = \Phi_{\mathcal{B}} \circ L_{\mathcal{K}'}^{\mathcal{K}}(A) \circ (\Phi_{\mathcal{A}})^{-1}$.

Mit anderen Worten: Ist x der Koordinatenvektor (bzgl. \mathcal{A}) von $v \in V$, dann ist $y = Ax$ der Koordinatenvektor (bzgl. \mathcal{B}) von $L_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(A)(v)$.

2. Die einer linearen Abbildung zugeordnete Matrix

Sei $F : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Für jedes $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ gibt es dann eindeutig bestimmte Skalare $\{a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}\}$ sodaß $F(v_j) = a_{1j}w_1 + a_{2j}w_2 + \dots + a_{mj}w_m$.

Auf diese Weise erhält man eine $m \times n$ Matrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F) = (a_{ij})$, die sog. darstellende Matrix von F bzgl. der Basen \mathcal{A} und \mathcal{B} , sowie eine Abbildung

$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} : \text{Hom}_K(V, W) \rightarrow M(m \times n; K)$ wobei $F \mapsto M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F)$.

Bemerkung 1. Die j -te Spalte von $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F)$ ist der Koordinatenvektor von $F(v_j)$ bzgl. der Basis \mathcal{B} .

Bemerkung 2. Ist x der Koordinatenvektor von $v \in V$ bzgl. \mathcal{A} , y der Koordinatenvektor von $F(v) \in W$ bzgl. \mathcal{B} , $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F)$ dann gilt $y = Ax$. Das heißt, daß das folgende Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccc} K^n & \xrightarrow{L_{\mathcal{K}'}^{\mathcal{K}}(A)} & K^m \\ \Phi_{\mathcal{A}} \downarrow & & \downarrow \Phi_{\mathcal{B}} \\ V & \xrightarrow{F} & W \end{array}$$

3. Der Isomorphismus

SATZ. Die Abbildung $L_{\mathcal{B}}^A : M(m \times n; K) \rightarrow \text{Hom}_K(V, W)$ ist ein Isomorphismus, dessen Umkehrabbildung durch $M_{\mathcal{B}}^A : \text{Hom}_K(V, W) \rightarrow M(m \times n; K)$ gegeben ist.

Das heißt unter anderem auch: Ist A eine $m \times n$ Matrix, dann ist A die darstellende Matrix von $L_{\mathcal{B}}^A(A)$. Ist $F \in \text{Hom}_K(V, W)$ und $A = M_{\mathcal{B}}^A(F)$, dann ist $F = L_{\mathcal{B}}^A(A)$.

4. Komposition von linearen Abbildungen

Nun seien V, V', V'' K -Vektorräume mit Basen $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}''$ gegeben, und $\dim V = n$, $\dim V' = m$, $\dim V'' = r$.

Weiters seien $F : V \rightarrow V'$ und $G : V' \rightarrow V''$ lineare Abbildungen. Setze $H = G \circ F$, und $A = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(F)$, $B = M_{\mathcal{B}''}^{\mathcal{B}'}(G)$.

Dann gilt: $M_{\mathcal{B}''}^{\mathcal{B}}(H) = M_{\mathcal{B}''}^{\mathcal{B}}(G \circ F) = BA = M_{\mathcal{B}''}^{\mathcal{B}'}(G)M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(F)$.

Analog zeigt man für $A \in M(m \times n; K)$, $B \in M(r \times m; K)$:

$$L_{\mathcal{B}''}^{\mathcal{B}}(BA) = L_{\mathcal{B}''}^{\mathcal{B}'}(B) \circ L_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(A).$$