Kap 5: Rang, Koordinaten-transformationen

• Sei $F : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann ist der Rang von F erklärt durch: rang F=dim ImF.

Stets gilt rang $F \leq \dim V$, und ist $\dim V < \infty$, dann gilt wegen der Dimensionsformel rang$F = \dim V \;\Leftrightarrow\; F$ ist injektiv.

Sei $A \in M(m \times n; K)$ und $L_A : K^n \to K^m$ die durch A definierte lineare Abbildung $x \mapsto Ax$. Dann ist rang L_A = Spaltenrang von A . Auf diese Weise kann der Rang einer Matrix A definiert werden : rang A = rang L_A = Spaltenrang von A .

• Sei $\dim V = n$, $\dim W = m$ und $F : V \to W$ linear. Sei weiters $\mathcal{A}$ eine Basis in V , $\mathcal{B}$ eine Basis in W und $A = M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(F)$. Wir wollen eine Bais von ImF (und damit rang F) bestimmen.
Dazu betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} K^n \arrow[r, "L_A"] \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{A}}"'] & K^m \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{B}}"] \\ V \arrow[r, "F"'] & W \end{tikzcd}$$

wobei $L_A(x) = Ax$. Weil $\Phi_{\mathcal{A}}$ und $\Phi_{\mathcal{B}}$ Isomorphismen sind, genügt es, eine Basis von Im$L_A \subseteq K^m$ zu bestimmen. Die Bilder dieser Basisvektoren unter $\Phi_{\mathcal{B}}$ liefern dann die gesuchte Basis für Im F .
Wir bilden also ${}^tA$, dann sind die Spalten von A die Zeilen von ${}^tA$. Nun bringen wir ${}^tA$ auf Zeilenstufenform B . Die von der Nullzeile verschiedenen Zeilen von B bilden dann eine Basis von Im L_A .

• Ist $F : V \to W$ ein Isomorphismus, dann gilt offenbar rang $F = \dim V = \dim W$.
Gilt andererseits $\dim V = \dim W < \infty$, dann sind folgende Aussagen für eine lineare Abbildung $F : V \to W$ äquivalent: i) F ist injektiv , ii) F ist surjektiv , iii) F ist bijektiv.

Damit ergibt sich offenbar: $F : V \to W$ ist ein Isomorphismus $\Leftrightarrow$ $\dim V = \dim W$ und $\operatorname{rang} F = \dim W$.

• Eine quadratische Matrix $A \in M(n \times n; K)$ heißt invertierbar (oder regulär) wenn es eine Matrix $A' \in M(n \times n; K)$ gibt, sodaß $AA' = A'A = E_n$.
Man kann leicht zeigen, daß $GL(n; K) = \{A \in M(n \times n; K) : A \text{ ist invertierbar } \}$ eine Gruppe bzgl. der Multiplikation von Matrizen bildet. Damit ist A' eindeutig bestimmt und wird mit A^{-1} bezeichnet. Man nennt A^{-1} die inverse Matrix zu A .
Es gelten folgende einfach zu überprüfende Tatsachen:

i) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

ii) A ist invertierbar $\Rightarrow$ ${}^tA$ ist invertierbar und $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

• Sei $F : V \to W$ linear mit $\dim V = \dim W$, $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{B}$ Basen von V bzw. W .
Dann gilt: F ist Isomorphismus $\Leftrightarrow$ $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(F)$ ist invertierbar.
In diesem Fall ist $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(F^{-1}) = (M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(F))^{-1}$.

Im besonderen gilt damit für eine Matrix $A \in M(n \times n; K)$:
A ist invertierbar $\Leftrightarrow$ ${}^tA$ ist invertierbar $\Leftrightarrow$ Spaltenrang $A = n$ $\Leftrightarrow$ Zeilenrang $A = n$.

• Es seien $\mathcal{A} = (v_1, ..., v_n)$ bzw. $\mathcal{B} = (w_1, ..., w_n)$ zwei Basen eines K-Vektorraums V mit $\dim V = n$. Ein Vektor $v \in V$ hat dann einen Koordinatenvektor x bzgl. $\mathcal{A}$, und einen Koordinatenvektor y bzgl. $\mathcal{B}$. Das folgende Diagramm

$$\begin{tikzcd} K^n \arrow[r, "L_T"] \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{A}}"'] & K^n \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{B}}"] \\ V \arrow[r, "id_V"'] & V \end{tikzcd}$$

heißt Koordinatentransformation, wobei $T = M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(id_V)$ und $L_T(x) = Tx$ ist. T heißt die Transformationsmatrix des Basiswechsels $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{B}$. Man beachte, daß die j-te Spalte von T der Koordinatenvektor von v_j bzgl. $\mathcal{B}$ ist.

Ist S die Transformationsmatrix von $\mathcal{B} \mapsto \mathcal{A}$, dann ist offenbar $T = S^{-1}$ die Transformationsmatrix von $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{B}$. Dies führt zur Frage der Bestimmung der inversen Matrix.

Der folgende Algorithmus liefert zum einen ein Kriterium, ob eine quadratische Matrix überhaupt invertierbar ist, und zum anderen ein Verfahren zur Bestimmung der inversen Matrix.

Sei $A \in M(n \times n; K)$.

i) Schreibe A und E_n nebeneinander und führe alle Operationen, die auf A vorgenommen werden, parallel an der umgeformten Matrix E_n durch.

ii) Durch Zeilenumformungen bringe A auf Zeilenstufenform B .

Wenn Zeilenrang $B < n$, dann ist A nicht invertierbar. Wenn Zeilenrang $B = n$, dann ist B eine obere Dreiecksmatrix mit Elementen $\neq 0$ in der Hauptdiagonalen.

Durch Zeilenumformungen führe B in eine Matrix über, wo alle Haupdiagonalelemente 1 sind.

iii) Durch weitere Zeilenumformungen erzeuge links die Matrix E_n . Rechts steht dann die Matrix A^{-1} .

- **Transformationsformel für darstellende Matrizen.**

Sei $\dim V = n$, $\dim W = m$ und $F : V \to W$ linear. Weiters seien $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ zwei Basen von V und $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ zwei Basen von W . Wir setzen $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F)$ und $B = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{A}'}(F)$.

Dann gilt: $B = SAT^{-1}$ wobei T den Basiswechsel $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}'$, und S den Basiswechsel $\mathcal{B} \mapsto \mathcal{B}'$ beschreibt.

- Sei $\dim V = n$, $\dim W = m$, $F : V \to W$ linear und $r = \text{rang } F$.

Dann existiert eine Basis $\mathcal{A}$ von V und eine Basis $\mathcal{B}$ von W sodaß

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F) = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dies ist die einfachste Form einer darstellenden Matrix.

- Es sei $A \in M(m \times n; K)$, S eine invertierbare $m \times m$ Matrix und T eine invertierbare $n \times n$ Matrix.

Dann gilt: Spaltenrang $SAT^{-1} =$ Spaltenrang A , Zeilenrang $SAT^{-1} =$ Zeilenrang A .

Als Folgerung stellt sich mit dem vorhergehenden Resultat heraus, daß für jede $m \times n$ Matrix A gilt: Zeilenrang $A =$ Spaltenrang A .

- **Ungleichung von Sylvester.**

Sei $A \in M(m \times n; K)$ und $B \in M(n \times r; K)$. Dann gilt:
rang A + rang B - $n \leq$ rang (AB) $\leq$ min{rang A , rang B}

- **Äquivalenz von Matrizen.**

Es seien $A, B \in M(m \times n; K)$.
B heißt äquivalent zu A , $B \sim A$, wenn es invertierbare Matrizen $S \in M(m \times m; K)$ und $T \in M(n \times n; K)$ gibt, sodaß $B = SAT^{-1}$.

Man kann zeigen: $B \sim A \quad \Leftrightarrow \quad$ rang A = rang B .
Insbesondere stellt sich heraus, daß die Äquivalenz von Matrizen eine Äquivalenzrelation auf $M(m \times n; K)$ ist.

- **Elementarmatrizen.**

Es stellt sich heraus, daß elementare Zeilenumformungen (bzw. Spaltenumformungen) durch Multiplikation mit geeigneten Matrizen, nämlich den Elementarmatrizen, beschrieben werden können.
Sei $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq i < j \leq m$, $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0$. Die folgenden $m \times m$ Matrizen heißen Elementarmatrizen:

$S_i(\lambda) = (c_{kl})$ wobei $c_{kk} = 1$ für $k \neq i$, $c_{ii} = \lambda$ und $c_{kl} = 0$ sonst.
$Q_i^j = (c_{kl})$ wobei $c_{kk} = 1 \ \forall \ k$, $c_{ij} = 1$ und $c_{kl} = 0$ sonst.
$Q_i^j(\lambda) = (c_{kl})$ wobei $c_{kk} = 1 \ \forall \ k$, $c_{ij} = \lambda$ und $c_{kl} = 0$ sonst.
$P_i^j = (c_{kl})$ wobei $c_{kk} = 1$ für $k \neq i, j$, $c_{ij} = c_{ji} = 1$ und $c_{kl} = 0$ sonst.

Sei $A \in M(m \times n; K)$.
$S_i(\lambda)A$ ist jene Matrix, die entsteht, wenn die i-te Zeile von A mit λ multipliziert wird.
$Q_i^j A$ ist jene Matrix, die entsteht, wenn die j-te Zeile von A zur i-ten Zeile von A addiert wird.
$Q_i^j(\lambda)A$ ist jene Matrix, die entsteht, wenn das λ-fache der j-ten Zeile von A zur i-ten Zeile von A addiert wird.
$P_i^j A$ ist jene Matrix, die entsteht, wenn die i-te Zeile von A mit der j-ten Zeile vertauscht wird.

Die Produkte $AS_i(\lambda)$, AQ_i^j , $AQ_i^j(\lambda)$ und AP_i^j beschreiben die entsprechenden elementaren Spaltenumformungen, wobei die hier auftretenden Elementarmatrizen $n \times n$ Matrizen sind.

Elementarmatrizen sind stets invertierbar. Es gilt:
$(S_i(\lambda))^{-1} = S_i(\frac{1}{\lambda})$, $(Q_i^j)^{-1} = Q_i^j(-1)$, $(Q_i^j(\lambda))^{-1} = Q_i^j(-\lambda)$, $(P_i^j)^{-1} = P_i^j$.

- Sei $A \in M(m \times n; K)$.

Durch elementare Zeilenumformungen (=Multiplikation von links mit geeigneten Elementarmatrizen) kann A in die Matrix $B_k ... B_1 A$ übergeführt werden, welche Zeilenstufenform besitzt.
Die Matrix $B_k ... B_1 A$ kann dann durch elementare Spaltenumformungen (=Multiplikation von rechts mit geeigneten Elementarmatrizen) auf die Form $B_k ... B_1 A C_1 ... C_l = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = B$ gebracht werden.
Setze $S = B_k ... B_1$ und $T^{-1} = C_1 ... C_l$. Dann gilt: $B = SAT^{-1}$.