Kap 1: VEKTORRÄUME

• Es sei X eine Menge. Eine **Familie von Elementen von** X ist eine Abbildung $\varphi : I \to X$, $i \mapsto \varphi(i) = x_i$, wobei die Menge I in diesem Zusammenhang auch "Indexmenge" genannt wird. Man schreibt vereinfacht $(x_i)_{i \in I}$ bzw. (x_i) .
Sei $J \subseteq I$. Dann heißt die Einschränkung $\varphi|_J$ von $\varphi : I \to X$ auf J eine **Teilfamilie** von $(x_i)_{i \in I}$. Man schreibt $(x_i)_{i \in J}$.
Für $I = \emptyset$ liegt per definition die sogenannte **leere Familie** vor.
Auf analoge Weise werden Familien von Teilmengen einer gegebenen Menge definiert.

• Es sei K ein Körper. Ein K**-Vektorraum** (bzw. Vektorraum über K) ist ein Tripel $(V, +, \cdot)$, wobei V eine nichtleere Menge ist, $+ : V \times V \to V$ mit $(v, w) \mapsto v + w$ und $\cdot : K \times V \mapsto V$ mit $(\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v$ Abbildungen sind, sodaß

(V1) : $(V, +)$ ist eine abelsche Gruppe

(V2) : $\forall\ v, w \in V$, $\lambda, \mu \in K$ gilt:

(a) $(\lambda + \mu) \cdot v = (\lambda \cdot v) + (\mu \cdot v)$

(b) $\lambda \cdot (v + w) = (\lambda \cdot v) + (\lambda \cdot w)$

(c) $(\lambda\mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$

(d) $1 \cdot v = v$

Das neutrale Element von $(V, +)$ wird mit 0 bezeichnet und heißt **Nullvektor** . Das inverse Element von $v \in V$ bzgl. $(V, +)$ wird mit $-v$ bezeichnet.
Die Elemente von V heißen **Vektoren** , die Elemente von K heißen **Skalare** . K heißt der **Skalarenkörper** des Vektorraums.

Kurz gesagt ist ein K-Vektorraum also eine Menge V (deren Elemente Vektoren genannt werden), auf der in geeigneter Weise eine Addition von Vektoren und eine Multiplikation von Skalaren (aus K) mit Vektoren definiert ist.

- **Beispiele für Vektorräume**

1) Sei K ein Körper und K^n die Menge der n-Tupel von Elementen aus K. Dann ist $V = K^n$ ein K-Vektorraum durch

$(x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$

$\lambda \cdot (x_1, ..., x_n) = (\lambda x_1, ..., \lambda x_n)$

Der Nullvektor ist offenbar das n-Tupel $(0, ..., 0)$.

Als Spezialfälle ergeben sich der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^n$ und der $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}^n$.

2) Sei X eine Menge und K ein Körper.

Dann ist Abb(X, K)=$\{ f : X \to K \ : f$ ist eine Abbildung$\}$ ein K-Vektorraum durch

$(f, g) \mapsto f + g$ wobei $(f + g)(x) = f(x) + g(x) \ \ \forall\, x \in X$

$(\lambda, f) \mapsto \lambda f$ wobei $(\lambda f)(x) = \lambda f(x) \ \ \forall\, x \in X$

In diesem Vektorraum sind die Vektoren also alle Abbildungen $X \to K$. Der Nullvektor ist die sog. "Nullabbildung" $0 : X \to K$ mit $x \mapsto 0 \ \ \forall\, x \in X$. Das inverse Element bzgl. der Addition von $f \in$Abb(X, K) ist die Abbildung $-f$ mit $(-f)(x) = -f(x)$.

Im besonderen ergeben sich damit für jede Menge X der $\mathbb{R}$-Vektorraum Abb$(X, \mathbb{R})$ und der $\mathbb{C}$-Vektorraum Abb$(X, \mathbb{C})$.

3) Ein reelles Polynom vom Grad $\leq n$ ist eine Abbildung $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von der Form $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + ... + a_n t^n$ mit $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$.

Die Menge $\mathbb{P}_n$ der Polynome vom Grad $\leq n$ ist offenbar mit den Operationen von 2) ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Der Nullvektor ist die Nullabbildung, welche auch ein Polynom ist und per definition den Grad -1 besitzt.

4) Man beachte:

die Menge $\mathbb{R}^n$ ist auch ein Vektorraum über $\mathbb{Q}$,

die Menge $\mathbb{C}^n$ ist auch ein Vektorraum über $\mathbb{R}$.

- **Unterverktorräume**

Sei $(V, +, \cdot)$ ein K-Vektorraum und $W \subseteq V$. Dann heißt W ein **Untervektorraum** von V , wenn

UV1) $W \neq \emptyset$

UV2) $\forall\ v, w \in W\ :\ v + w \in W$

UV3) $\forall\ v \in W\ ,\ \forall\ \lambda \in K\ :\ \lambda v \in W$.

Damit können in W dieselben Operationen wie in V definiert werden, wodurch W selbst zu einem K-Vektorraum wird. Man schreibt auch $W \lhd V$.
Offenbar liegt der Nullvektor von V in W und ist der Nullvektor von W . Zu $v \in W$ ist $-v$ ebenfalls in W und das inverse Element von v in W.

In jedem K-Vektorraum V sind V selbst und der **Nullvektorraum** $\{0\}$ die sogenannten trivialen Untervektorräume.
Sei $V = \mathbb{R}^n$ und $A = \mathbb{R}v$ mit $v \neq 0$. Dann gilt $A \lhd V$ (A ist geometrisch gesehen eine Gerade durch den Ursprung).
Sei $\mathcal{C}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ :\ f \text{ ist stetig}\}$ und $\mathcal{D}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ :\ f \text{ ist differenzierbar}\}$.
Dann gilt offenbar $\mathbb{P}_n \lhd \mathcal{D}(\mathbb{R}) \lhd \mathcal{C}(\mathbb{R}) \lhd \operatorname{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Sei V ein K-Vektorraum und $W_i \lhd V$ für alle $i \in I$. Dann ist $W = \bigcap\limits_{i \in I} W_i$ wieder ein Untervektorraum, i.e. der Durchschnitt beliebig vieler Untervektorräume ist ein Untervektorraum.
Hingegen ist die Vereinigung von zwei Untervektorräumen i.a. kein Untervektorraum.
Ist jedoch eine Familie $(W_i)_{i \in I}$ von Untervektorräumen von V bzgl. Mengeninklusion linear geordnet (d.h. $W_i \subseteq W_j$ oder $W_j \subseteq W_i$ für alle $i, j \in I$) , dann ist $W = \bigcup\limits_{i \in I} W_i$ ein Untervektorraum.
Des weiteren gilt für $W, W' \lhd V$: wenn $W \cup W' \lhd V$ dann $W \subseteq W'$ oder $W' \subseteq W$.

- **Linearkombinationen, lineare Unabhängigkeit**

Sei V ein K-Vektorraum und $(v_1, v_2, ..., v_r)$ eine endliche Familie von Vektoren aus V.
Dann heißt $v \in V$ eine Linearkombination von $(v_1, v_2, ..., v_r)$ wenn Skalare $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$ existieren sodaß $v = \lambda v_1 + \lambda v_2 + ... + \lambda v_r$.
Man sagt auch vereinfacht: v ist eine Linearkombination der Vektoren $v_1, v_2, ..., v_r$.

$Kv_1 + Kv_2 + ...Kv_r$ ist offenbar die Menge aller Linearkombinationen von $(v_1, v_2, ..., v_r)$. Gilt $W \lhd V$ und sind die Vektoren $v_1, v_2, ..., v_r$ aus W , dann ist auch jede Linearkombination von $(v_1, v_2, ..., v_r)$ in W .

Sei $(v_i)_{i\in I}$ eine beliebige Familie von Vektoren aus dem K-Vektorraum V . Die Menge aller Vektoren $v \in V$, die sich als Linearkombination von endlich vielen Vektoren aus $(v_i)_{i\in I}$ darstellen lassen, wird mit $\text{Span}(v_i)_{i\in I}$ bezeichnet. $\text{Span}(v_i)_{i\in I}$ heißt der von der Familie $(v_i)_{i\in I}$ aufgespannte Raum.
Ist $I = \emptyset$ dann ist $\text{Span}(v_i)_{i\in I}$ per definition der Nullvektorraum.
Ist $I = \{1, 2, ..., r\}$ dann ist $\text{Span}(v_1, ..., v_r)$ offenbar gleich $Kv_1 + ... + Kv_r$.

Es gilt: $\text{Span}(v_i)_{i\in I}$ ist der kleinste Untervektorraum von V, der alle Vektoren v_i enthält.

Definition. Eine endliche Familie $(v_1, v_2, ..., v_r)$ von Vektoren aus V heißt linear unabhängig, wenn gilt: $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_r v_r = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, ..., \lambda_r = 0$.
D.h. der Nullvektor kann nur als triviale Linearkombination der $(v_1, v_2, ..., v_r)$ dargestellt werden.
Eine Familie $(v_i)_{i\in I}$ heißt linear unabhängig, wenn jede endliche Teilfamilie linear unabhängig ist.
$(v_i)_{i\in I}$ heißt linear abhängig wenn $(v_i)_{i\in I}$ nicht linear unabhängig ist (i.e. es existiert eine endliche Teilfamilie welche eine nichttriviale Darstellung des Nullvektors erlaubt).
Per definition ist die leere Familie (welche den Nullvektorraum aufspannt) linear unabhängig.

Offenbar ist eine Familie $(v_i)_{i\in I}$ von Vektoren aus V linear abhängig genau dann, wenn zumindest einer der Vektoren der Familie als Linearkombination der restlichen Vektoren dargestellt werden kann.

Sei $V = K^n$ und sei $e_i = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ wobei 1 an der i-ten Stelle steht. Dann sind die Vektoren $e_1, e_2, ..., e_n$ linear unabhängig.
Sei $V = \mathbb{P}_n$ und für $i = 0, 1, ..., n$ sei p_i das Polynom $p_i(t) = t^i$. Dann sind $p_0, p_1, ..., p_n$ linear unabhängig.

Sei $(v_i)_{i\in I}$ eine Familie von Vektoren aus V . Dann kann $v \in \text{Span}(v_i)_{i\in I}$ formal geschrieben werden in der Form $v = \sum_{i\in I} \lambda_i v_i$ (man beachte, daß höchstens endlich viele

$\lambda_i \neq 0$ sind).

Dann gilt: $(v_i)_{i\in I}$ ist linear unabhängig $\Leftrightarrow$ die Darstellung jedes Vektors $v \in \mathrm{Span}(v_i)_{i\in I}$ in der Form $v = \sum\limits_{i\in I} \lambda_i v_i$ ist eindeutig (d.h. alle Koeffizienten λ_i sind eindeutig bestimmt).

Definition. Sei V ein K-Vektorraum.

1) $(v_i)_{i\in I}$ heißt ein Erzeugendensystem von V, wenn $\mathrm{Span}(v_i)_{i\in I} = V$.

2) $(v_i)_{i\in I}$ heißt eine Basis von V, wenn $(v_i)_{i\in I}$ ein Erzeugendensystem und linear unabhängig ist. Die Anzahl der Elemente einer Basis heißt die Länge der Basis (ist eventuell ∞).

Für $V = K^n$ ist $(e_1, e_2, ..., e_n)$ eine Basis. Sie heißt auch die kanonische Basis von K^n .
Für $V = \mathbb{P}_n$ ist $(1, t, t^2, ..., t^n)$ eine Basis.
(1) ist Basis von $\mathbb{C}$ als $\mathbb{C}$-Vektorraum, $(1, i)$ ist Basis von $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum betrachtet.

Satz. Sei $V \neq \{0\}$ ein K-Vektorraum und $(v_i)_{i\in I}$ eine Familie von Vektoren. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1) $(v_i)_{i\in I}$ ist eine Basis von V,

2) $(v_i)_{i\in I}$ ist ein unverkürzbares Erzeugendensystem,

3) $(v_i)_{i\in I}$ ist eine unverlängerbare linear unabhängige Familie,

4) $(v_i)_{i\in I}$ ist ein Erzeugendensystem und jeder Vektor $v \in V$ läßt sich daraus eindeutig linear kombinieren.

Daraus kann man den **Basisauswahlsatz** folgern. Sei $(v_1, v_2, ..., v_r)$ ein Erzeugendensystem von V . Durch sukzessives Wegnehmen von Vektoren erreicht man in endlich vielen Schritten ein unverkürzbares Erzeugendensystem, also eine Basis. Das heißt: aus einem endlichen Erzeugendensystem kann eine Basis ausgewählt werden.

Austauschlemma. Sei $(v_1, v_2, ..., v_r)$ eine Basis von V und sei $w = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_r v_r$. Ist $\lambda_k \neq 0$ dann ist $(v_1, ..., v_{k-1}, w, v_{k+1}, ..., v_r)$ wieder eine Basis.

Austauschsatz von Steinitz. Sei $(v_1, v_2, ..., v_r)$ eine Basis von V und sei $(w_1, ..., w_n)$ eine linear unabhängige Familie. Dann gilt:

i) $n \leq r$

ii) $\exists\ i_1, ..., i_n$ sodaß v_{i_1} gegen w_1,...,v_{i_n} gegen w_n ausgetauscht werden kann, und man wieder eine Basis erhält.
D.h. $(w_1, ..., w_n)$ und gewisse Vektoren aus $(v_1, v_2, ..., v_r)$ bilden eine Basis.

Folgerungen. Hat ein Vektorraum V eine Basis der Länge r, dann gibt es höchstens r linear unabhängige Vektoren in V. Des weiteren haben alle endlichen Basen eines Vektorraums die gleiche Länge.

Aus dem Lemma von Zorn folgt, daß jede linear unabhängige Familie in einem beliebigen K-Vektorraum zu einer Basis vergrößert werden kann. Das bedeutet insbesondere, daß jeder Vektorraum eine Basis besitzt.
Im Falle endlich erzeugter Vektorräume kann man ohne das Lemma von Zorn zeigen, daß jede linear unabhängige Familie zu einer Basis ergänzt werden kann (**Basisergänzungssatz**).

Definition. Sei V ein K-Vektorraum.
$\dim_K V = \infty$ wenn V keine endliche Basis besitzt, $\dim_K V = r$ wenn V eine Basis der Länge r besitzt.
$\dim_K V$ heißt die **Dimension** von V über K.

Bemerkungen.
1) Sei $\dim V = n$ und sei $(v_1, ..., v_n)$ linear unabhängig. Dann ist $(v_1, ..., v_n)$ eine Basis.
2) Sei $W \lhd V$ und $\dim V < \infty$. Dann ist $\dim W \leq \dim V$. Wenn $\dim W = \dim V$ dann ist $W = V$.
3) $\dim_K K^n = n$, $\dim \mathbb{P}_n = n + 1$
4) $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \infty$, $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$, $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$
5) $\dim \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \infty$