Mittelwertsätze

Nachdem die Ableitung $f'(x_0)$ als Steigungsmaß des Graphen einer Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 eingeführt wurde, liegt es nahe, dass in einem Extremalpunkt (Maximum oder Minimum) die Ableitung f' den Wert Null annimmt.

Satz (**Kriterium von Fermat**)

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ an $x_0 \in (a,b)$ differenzierbar. Hat f an der Stelle x_0 ein lokales Maximum oder Minimum, gilt notwendigerweise $f'(x_0) = 0$.

Beweis. (für ein lokales Maximum)

Betrachte Folgen (x_n) und (x'_n) mit $x_n = x_0 + \frac{1}{n}$ bzw. $x'_n = x_0 - \frac{1}{n}$.
Hat f an x_0 ein lokales Maximum, dann gilt

$f'(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(x_0+\frac{1}{n})-f(x_0)}{\frac{1}{n}} \leq 0$ bzw. $f'(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(x_0-\frac{1}{n})-f(x_0)}{-\frac{1}{n}} \geq 0$.

Damit ist $f'(x_0) = 0$. □

Satz. (**Satz von Rolle**)

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a,b) und es gelte $f(a) = f(b)$.

Dann gibt es (mindestens) eine Stelle $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = 0$.

Beweis. Der Fall einer konstanten Funktion ist trivial. Sei also f nicht konstant. Weil f stetig und $[a,b]$ kompakt ist, gibt es ein Maximum und ein Minimum, wobei eines der beiden von $f(a)$ (und damit auch von $f(b)$) verschieden sein muß. Sei $\xi \in (a,b)$ diese Stelle.

Nach dem Kriterium von Fermat ist dann $f'(\xi) = 0$. □

Der Satz von Rolle kann nun verallgemeinert werden zum

Satz. (**1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung**)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a, b) . Dann gibt es eine Stelle $\xi \in (a, b)$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi) \ .$$

(Dies bedeutet: Der Graph von f hat an der Stelle ξ eine Tangente, die parallel zur Sekante durch $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ ist.)

Beweis.

Betrachte die Hilfsfunktion $F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$.

Dann ist $F(x)$ stetig auf $[a, b]$ und auf (a, b) differenzierbar und es gilt $F(a) = F(b) = 0$. Nach dem Satz von Rolle $\exists\, \xi \in (a, b)$ mit $F'(\xi) = 0$,

d.h. aber $f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$. $\square$

Folgerungen. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a, b) .

1) $f'(x) = 0 \quad \forall\, x \in (a, b) \quad \Rightarrow \quad f$ ist konstant.

Beweis. Wende den 1. MWS auf f im Intervall $[a, x]$ mit $a < x \leq b$ an. $\square$

2) $f'(x) = g'(x) \quad \forall\, x \in (a, b) \quad \Rightarrow \quad f(x) = g(x) + \text{const.}$

Beweis. Folgt aus 1) mit $F(x) = f(x) - g(x)$. $\square$

3) i) $f'(x) > 0 \quad \forall\, x \in (a, b) \quad \Rightarrow \quad f$ ist streng monoton wachsend,

ii) $f'(x) < 0 \quad \forall\, x \in (a, b) \quad \Rightarrow \quad f$ ist streng monoton fallend.

Beweis. (für i))

Gelte $f'(x) > 0 \quad \forall\, x \in (a, b)$ und sei $a \leq x_1 < x_2 \leq b$. Anwendung des 1. MWS auf f im Intervall $[x_1, x_2]$ liefert :

$\exists\, \xi \in (x_1, x_2)$ mit $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$. Weil $f'(\xi) > 0$ und $x_2 - x_1 > 0$ ist, gilt $f(x_2) > f(x_1)$. $\square$

4) $\exists \lim\limits_{x\to b^-} f'(x) \quad \Rightarrow \quad f$ ist an b linksseitig differenzierbar und $f'(b) = \lim\limits_{x\to b^-} f'(x)$.

Beweis. Da f stetig an b ist, gilt $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$. Sei nun (x_n) eine Folge aus (a,b) mit $x_n \neq b$ und $x_n \to b$.

Anwendung des 1. MWS auf f in $[x_n, b]$ liefert : $\exists\, \xi_n \in (x_n, b)$ mit $\frac{f(b)-f(x_n)}{b-x_n} = f'(\xi_n)$. Klarerweise gilt $\xi_n \to b$. Weil lt. Vor. $\lim\limits_{n\to\infty} f'(\xi_n)$ existiert, existiert auch der Grenzwert auf der linken Seite, welcher $f'(b)$ darstellt. $\square$

Mit Hilfe des 1. MWS lassen sich zahlreiche interessante und wichtige Abschätzungen gewinnen.

Beispiel. $1 + x < e^x < \frac{1}{1-x}$ für $x \in (0,1)$.

Anwendung des 1. MWS auf $f(t) = e^t$ in $[0,x]$ liefert $\frac{e^x - e^0}{x} = e^\xi$ mit $0 < \xi < x$.

Weil e^ξ monoton wächst, gilt $1 = e^0 < e^\xi < e^x$ und damit

$1 < \frac{e^x-1}{x} < e^x$ bzw. $1 + x < e^x < \frac{1}{1-x}$, weil $x \in (0,1)$.

Beispiel. $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$ für $x > 0$.

Anwendung des 1. MWS auf $f(t) = \ln(1+t)$ in $[0,x]$ liefert

$\frac{\ln(1+x) - \ln 1}{x} = \frac{1}{1+\xi}$ mit $0 < \xi < x$.

Weil $\frac{1}{1+\xi}$ monoton fällt, gilt $1 > \frac{1}{1+\xi} > \frac{1}{1+x}$ und damit

$\frac{1}{1+x} < \frac{\ln(1+x)}{x} < 1$ bzw. $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$, weil $x > 0$.

Satz. (**2. Mittelwertsatz der Differentialrechnung**)

Seien f und g stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf (a,b) . Dann $\exists\, \xi \in (a,b)$ sodass

$$[f(b) - f(a)]g'(\xi) = [g(b) - g(a)]f'(\xi) \ .$$

Ist $g'(x) \neq 0$ auf (a,b) , gilt weiters

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \ .$$

Beweis. Die Hilfsfunktion $F(x) = [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a)]f(x)$ erfüllt die Voraussetzungen des Satzes von Rolle, somit $\exists \ \xi \in (a,b)$ mit $F'(\xi) = 0$, also $[f(b)-f(a)]g'(\xi)-[g(b)-g(a)]f'(\xi) = 0$, womit die erste Aussage gezeigt wurde.

Ist $g'(x) \neq 0$ auf (a,b) , folgt mit dem 1. MWS angewandt auf $g(t)$ in $[a,b]$, dass $g(b) \neq g(a)$. Damit erhält man die zweite Aussage durch Division. $\square$

Bemerkung. Speziell für $g(x) = x$ erhalten wir den 1. MWS .

Ohne Beweis sei ein weiteres Ergebnis angeführt.

Satz. (**Satz von Darboux**, Zwischenwertsatz für Ableitungen)

Sei f auf $[a,b]$ differenzierbar und sei $f'(a) \neq f'(b)$. Dann nimmt $f'(x)$ in (a,b) jeden Wert zwischen $f'(a)$ und $f'(b)$ an.

Bemerkung. Es gibt differenzierbare Funktionen, die nicht stetig differenzierbar sind, wie z.B.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \in [-1,1] \ , \ x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Trotzdem gilt für die Ableitung die Zwischenwerteigenschaft (welche somit i.a. nicht die Stetigkeit der Ableitung impliziert).