Unbestimmtes Integral, Mittelwertsätze

Ist f R-integrierbar, dann kann $\int\limits_a^b f(x)dx$ einfach bestimmt werden, wenn eine Stammfunktion $F_1(x)$ von f existiert und bekannt ist. Wir wissen, dass dann auch $F(x) = F_1(x) + C$ mit beliebiger Konstante C ebenfalls eine Stammfunktion ist.

Definition. Sei f auf dem Intervall I definiert und besitze dort eine Stammfunktion.

$\int f(x)dx = \{F \ : \ F$ ist Stammfunktion von f auf $I\}$ nennt man dann **unbestimmtes Integral** .

(Die "Klasse" aller Stammfunktionen von f läßt sich stets mit Hilfe einer speziellen Stammfunktion $F(x)$ in der Form $F(x) + C$ ausdrücken)

Da Differentiation und Integration zueinander inverse Prozesse sind, lassen sich bereits viele Stammfunktionen angeben, z.B.

$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$, weil $(\frac{1}{n+1}x^{n+1})' = x^n \quad (n \in \mathbb{N})$.

Weitere Beispiele.

a) $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ auf $I = (0, \infty)$ und für $\alpha \neq -1$

b) $\int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln x + C$ auf $I = (0, \infty)$

c) $\int e^x dx = e^x + C$ auf $\mathbb{R}$

d) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\sqrt{1-x^2} + C$ auf $I = (-1, 1)$

e) $\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x + C$ auf $\mathbb{R}$

f) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$ auf $\mathbb{R}$

etc.

Satz. (Linearität des unbestimmten Integrals)

Wenn die Funktionen f und g auf I Stammfunktionen F bzw. G besitzen, dann auch die Funktion $\lambda f + \mu g$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$ und es gilt

$$\int (\lambda f + \mu g)(x)dx = \lambda F(x) + \mu G(x) = \lambda \int f(x)dx + \mu \int g(x)dx \ .$$

Beweis. $\lambda F(x) + \mu G(x)$ ist eine Stammfunktion von $\lambda f(x) + \mu g(x)$, weil

$(\lambda F(x) + \mu G(x))' = \lambda F'(x) + \mu G'(x) = \lambda f(x) + \mu g(x)$. $\square$

Satz. (Integration durch Substitution)

Sei $\varphi(\xi)$ stetig differenzierbar auf dem Intervall I_ξ und sei $f(x)$ stetig auf dem Intervall $I_x = \varphi(I_\xi)$. Sei weiters $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$. Dann gilt

1) $\int f(\varphi(\xi))\varphi'(\xi)d\xi = F(\varphi(\xi)) = \int f(x)\, dx|_{x=\varphi(\xi)}$

2) Falls $\varphi'(\xi) \neq 0$ auf I_ξ : $\int f(x)dx = \int f(\varphi(\xi))\varphi'(\xi)\, d\xi|_{\xi=\varphi^{-1}(x)}$

Beweis. Aus der Stetigkeit von f und φ' folgt, dass $f(\varphi(\xi))\varphi'(\xi)$ ebenfalls auf I_ξ stetig ist und daher dort eine Stammfunktion besitzt.

1) Mit $x = \varphi(\xi)$ und $F(x) = \int f(x)dx$ gilt

$\frac{d}{d\xi}F(\varphi(\xi)) = \frac{dF}{dx}(\varphi(\xi))\varphi'(\xi) = f(\varphi(\xi))\varphi'(\xi)$, d.h.

$F(\varphi(\xi))$ ist Stammfunktion von $f(\varphi(\xi))\varphi'(\xi)$ auf I_ξ .

2) Mit $\xi = \varphi^{-1}(x)$ und $\Phi = \int f(\varphi(\xi))\varphi'(\xi)d\xi$ gilt

$\frac{d}{dx}\Phi(\varphi^{-1}(x)) = \frac{d\Phi}{d\xi}(\varphi^{-1}(x))\frac{d\varphi^{-1}}{dx}(x) = f(\varphi(\varphi^{-1}(x)))\frac{d\varphi}{d\xi}(\xi)\frac{d\varphi^{-1}}{dx}(x) = f(x)$.

Damit ist $\Phi(\varphi^{-1}(x))$ eine Stammfunktion von $f(x)$. $\square$

Beispiele.

1) Betrachte $\int \sin \frac{5\xi+1}{2} d\xi$. Setze $x = \varphi(\xi) = \frac{5\xi+1}{2}$.

Dann ist $\varphi'(\xi) = \frac{5}{2}$ und $f(x) = f(\varphi(\xi)) = \sin x$, also

$\int \sin \frac{5\xi+1}{2} d\xi = \frac{2}{5} \int \sin \frac{5\xi+1}{2} \frac{5}{2} d\xi = \frac{2}{5} \int \sin x \, dx \big|_{x=\frac{5\xi+1}{2}} =$

$= (-\frac{2}{5} \cos x + C)_{x=\frac{5\xi+1}{2}} = -\frac{2}{5} \cos \frac{5\xi+1}{2} + C$.

2) Betrachte $\int \frac{\xi^2}{\sqrt{1+\xi^3}} d\xi$. Setze $x = \varphi(\xi) = 1 + \xi^3$.

Dann ist $\varphi'(\xi) = 3\xi^2$ und $f(x) = f(\varphi(\xi)) = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^3}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$, also

$\int \frac{\xi^2}{\sqrt{1+\xi^3}} d\xi = \frac{1}{3} \int \frac{1}{\sqrt{1+\xi^3}} 3\xi^2 d\xi = \frac{1}{3} \int \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx \big|_{x=1+\xi^3} = (\frac{2}{3}\sqrt{x}) \,\big|_{x=1+\xi^3} =$

$= \frac{2}{3}\sqrt{1+\xi^3} + C$.

3) Betrachte $\int \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx$. Setze $\xi = \sqrt{1+x}$ bzw. $x = \varphi(\xi) = -1 + \xi^2$ und $\xi > 0$. Dann ist $\varphi'(\xi) = 2\xi \neq 0$ für $\xi > 0$ und

$\int \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx = \int \frac{-1+\xi^2}{\xi} 2\xi \, d\xi \big|_{\xi=\sqrt{1+x}} = (-2\xi + \frac{2}{3}\xi^3 + C) \,\big|_{\xi=\sqrt{1+x}} =$

$= -2\sqrt{1+x} + \frac{2}{3}(1+x)^{3/2} + C$.

Satz. (Partielle Integration)

Seien $f(x)$ und $g(x)$ stetig differenzierbar auf einem Intervall I . Dann gilt

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

(wobei "=" so zu verstehen ist, dass sich linke und rechte Seite nur um eine Konstante unterscheiden)

Beweis. Aus der Stetigkeit von $f'(x)$ und $g'(x)$ folgt mit dem 1. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, dass $f(x)g'(x)$ und $f'(x)g(x)$ jeweils eine Stammfunktion besitzen.

Sei nun $H(x)$ eine Stammfunktion von $f'(x)g(x)$ auf I . Dann hat die rechte Seite die Form $f(x)g(x) - H(x) = R(x)$.

Wegen $R'(x) = (f(x)g(x))' - H'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - f'(x)g(x) = f(x)g'(x)$ ist $R(x)$ auch Stammfunktion von $f(x)g'(x)$, womit die

Behauptung gezeigt ist. $\square$

Beispiele.

1) $I = \int (1+x^2)\cosh x dx$. Setze $f(x) = 1 + x^2$ und $g'(x) = \cosh x$.

Dann ist $f'(x) = 2x$ und $g(x) = \sinh x$.

Damit ist $I = (1+x^2)\sinh x - 2\int x \sinh x dx$.

Erneute partielle Integration mit $u(x) = x$ und $v'(x) = \sinh x$ ergibt

$I = (1+x^2)\sinh x - 2(x\cosh x - \int \cosh x dx) =$

$= (3+x^2)\sinh x - 2x\cosh x + C$.

2) $I = \int \ln x dx$. Setze $f(x) = \ln x$ und $g'(x) = 1$.

Dann ist $f'(x) = \frac{1}{x}$ und $g(x) = x$.

Also ist $I = x\ln x - \int \frac{1}{x} x dx = x\ln x - x + C$.

3) $I = \int e^x \sin x dx$. Setze $f(x) = e^x$ und $g'(x) = \sin x$.

Dann ist $f'(x) = e^x$ und $g(x) = -\cos x$.

Also ist $I = -e^x\cos x + \int e^x \cos x dx$. Erneute partielle Integration mit $u(x) = e^x$ und $v'(x) = \cos x$ ergibt

$I = -e^x\cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx = -e^x\cos x + e^x\sin x - I$.

Damit ist $I = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x)$.

Bemerkung. (Integrale der rationalen Funktionen)

Sei $I = \int R(x)dx$, wobei $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ eine rationale Funktion ist.

Partialbruchzerlegung führt auf Integrale der Form

$\int \frac{dx}{(x-c)^m}$ bzw. $\int \frac{\alpha x + \beta}{(x^2+ax+b)^m} dx$ (siehe Formelsammlung !!)

Die vorgestellten Methoden können natürlich auch zur Bestimmung von bestimmten Integralen herangezogen werden.

• Sind f, g stetig differenzierbar auf dem Intervall $[a, b]$, dann gilt

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

• Ist $\varphi'(\xi)$ stetig auf dem Intervall $[\alpha, \beta]$ und $f(x)$ stetig auf der Bildmenge $\varphi([\alpha, \beta])$, dann gilt

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(\xi))\varphi'(\xi)d\xi$$

(Beweis : Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ auf $\varphi([\alpha, \beta])$, dann ist wegen früher $F(\varphi(\xi))$ eine Stammfunktion von $f(\varphi(\xi))\varphi'(\xi)$ auf $\varphi([\alpha, \beta])$. Damit ist

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(\xi))\varphi'(\xi)d\xi = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx \ . \quad \Box \ )$$

Beispiele.

1) Sei $I = \int_0^1 x \arctan x dx$. Setze $f(x) = \arctan x$, $g'(x) = x$. Dann ist $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $g(x) = \frac{x^2}{2}$. Damit ist

$$I = \int_0^1 x \arctan x dx = \frac{x^2}{2} \arctan x \Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1 (1 - \frac{1}{1+x^2})dx =$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\,(x - \arctan x)|_0^1 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}(1 - \frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ .$$

2) Sei $I = \int_0^{\ln 2} \frac{e^\xi}{\sqrt{1+e^\xi}}d\xi$. Setze $1 + e^\xi = \varphi(\xi) = x$. Dann ist $\varphi'(\xi) = e^\xi$ und mit $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ gilt

$$I = \int_0^{\ln 2} \frac{1}{\sqrt{1+e^\xi}}e^\xi d\xi = \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\ |_2^3 = 2(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \ .$$

3) Sei $I = \int\limits_4^9 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$. Setze $\xi^2 = \varphi(\xi) = x$. Dann ist $\varphi'(\xi) = 2\xi > 0$ für $\xi > 0$.

Damit $I = \int\limits_4^9 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \int\limits_2^3 \frac{2\xi}{1+\xi} d\xi = 2 \int\limits_2^3 (1 - \frac{1}{1+\xi}) d\xi = 2 \left(\xi - \ln(1+\xi)\right)\Big|_2^3 =$

$= 2(3 - \ln 4 - (2 - \ln 3)) = 2(1 - \ln \frac{4}{3})$.

Analog zu den Mittelwertsätzen der Differentialrechnung gibt es auch solche der Integralrechnung. Der 1. MWS der Differentialrechnung besagt, dass es im Intervall (a, b) eine Stelle ξ gibt, an der die Steigung des Graphen von f der Steigung der Sekante entspricht. Analog dazu besagt der 1. MWS der Integralrechnung, dass es eine Stelle $\xi \in (a, b)$ gibt, sodass $\int\limits_a^b f(x)dx$ gleich dem Flächeninhalt eines Rechtecks mit Seitenlängen $b-a$ und $f(\xi)$ ist.

Satz. (**1. Mittelwertsatz der Integralrechnung**)

Sei f stetig auf $[a, b]$. Dann existiert eine Stelle $\xi \in (a, b)$ mit

$$\int\limits_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) .$$

Beweis. Die Funktion $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ ist stetig differenzierbar auf $[a, b]$. Anwendung des 1. MWS der Differentialrechnung auf $F(x)$ liefert : $\exists\ \xi \in (a, b)$ sodass $F(b) - F(a) = F'(\xi)(b-a)$ und damit

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F'(\xi)(b-a) = f(\xi)(b-a) . \quad \square$$

Satz. (Erweiterter Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Seien f, g stetig auf $[a, b]$ und $g(x) \geq 0$ (bzw. $g(x) \leq 0$) auf $[a, b]$. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx \ .$$

Beweis. (für $g(x) \geq 0$)

Setze $A = \int_a^b g(x)dx$ und $m = \min_{x\in[a,b]} f(x)$ und $M = \max_{x\in[a,b]} f(x)$.

Dann gilt $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x) \quad \forall\ x \in [a,b]$ und weiters

$$mA = m\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M\int_a^b g(x)dx = MA \ .$$

Wenn $A = 0$, dann offenbar auch $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$ und jedes $\xi \in (a,b)$ genügt.

Wenn $A \neq 0$, dann gilt $m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{A} \leq M$.

Nach dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen gibt es dann ein $\xi \in (a,b)$ mit $f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{A}$. Daraus folgt die Aussage. $\square$

Satz. (**2. Mittelwertsatz der Integralrechnung**)

Auf $[a,b]$ seien f monoton und f' und g stetig. Dann existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^\xi g(x)dx + f(b)\int_\xi^b g(x)dx \ .$$

Beweis. Setze $G(x) = \int_a^x g(t)dt$. Dann ist $G(x)$ eine Stammfunktion von $g(x)$ und $\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b f(x)G'(x)dx$. Partielle Integration liefert nun

$$\int_a^b f(x)G'(x)dx = f(x)G(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)G(x)dx \ .$$

Der erweiterte 1. Mittelwertsatz angewandt auf $G(x)$ liefert nun :

$$\exists\ \xi \in (a,b) \quad \text{mit} \quad \int\limits_a^b f'(x)G(x)dx = G(\xi)\int\limits_a^b f'(x)dx = G(\xi)(f(b)-f(a))\ .$$

Damit ist $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(b)G(b) - f(a)G(a) - G(\xi)(f(b)-f(a)) =$

$= f(a)(G(\xi)-G(a)) + f(b)(G(b)-G(\xi)) =$

$= f(a)\int\limits_a^\xi g(x)dx + f(b)\int\limits_\xi^b g(x)dx\ . \quad \square$