Unendliche Reihen

Wegen der elementaren Eigenschaften der Zahlen ist klar, was unter einer **endlichen** Summe von Zahlen $a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ zu verstehen ist. Vorderhand ist noch nicht erklärt, was unter einer "unendlichen Summe" von Zahlen zu verstehen ist. Mittels des Begriffes der Folge läßt sich nun auch dem Begriff der "unendlichen Summe" bzw. einer unendlichen Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ eine exakte Bedeutung geben.

Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge (die Folge der Summanden). Wir bilden eine zugehörige Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$.

s_n heißt **n-te Partialsumme** .

Konvergiert die Folge (s_n) der Partialsummen, $s_n \to s$, dann sagt man, dass die unendliche Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert, und schreibt $s = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

D.h. Die Summe einer unendlichen Reihe ist der Grenzwert der Folge der Partialsummen.

Bemerkung. Reihen der Form $\sum\limits_{k=m}^{\infty} a_k$ können durch Umindizierung auf die "Standardform" gebracht werden, und damit hat die Schreibweise $\sum\limits_{k=m}^{\infty} a_k$ ebenfalls eine klare Bedeutung.

Definition. Eine Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt **divergent** , wenn sie nicht konvergiert.

Beispiel 1. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + \ldots$ (**Geometrische Reihe**)

$s_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n$ und $qs_n = q + q^2 + \ldots + q^{n+1}$. Für $q = 1$ ist $s_n = n + 1$ und damit ist (s_n) divergent. Für $q \neq 1$

ist $s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. Aus den Eigenschaften der geometrischen Folge

folgt, dass für $|q| < 1$ die Reihe konvergiert und es gilt $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$.

Für $|q| \geq 1$ divergiert die Reihe.

Beispiel 2. $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots$ (**Teleskop-Reihe**)

Wegen $\frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ ist $s_n = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \ldots + (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) =$

$= 1 - \frac{1}{n} \to 1$. Also ist die Reihe konvergent.

Beispiel 3. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$ (**Harmonische Reihe**)

Zu $k \in \mathbb{N}$ betrachten wir $\sigma_k = \sum\limits_{m=2^{k-1}+1}^{2^k} \frac{1}{m}$. Hier gibt es $2^k - 2^{k-1}$ Summanden und $\frac{1}{2^k}$ ist der kleinste Summand. Folglich ist

$\sigma_k \geq (2^k - 2^{k-1})\frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Ist nun $n = 2^k$, dann ist $s_n = 1 + \sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_k \geq 1 + \frac{k}{2}$.

Damit ist (s_n) **keine** beschränkte Folge, kann also nicht konvergent sein, und folglich ist die harmonische Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ **divergent** .

Beispiel 4. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots$

Setze $c_1 = 1$ und $c_k = \frac{1}{(k-1)k}$ für $k \geq 2$. Dann gilt $\frac{1}{k^2} \leq c_k \ \forall\, k$ und weil $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ konvergent ist (siehe Beispiel 2.), folgt mit dem Vergleichskriterium (siehe später), dass $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ **konvergent** ist.

Aus bereits erwähnten Aussagen über Folgen ergibt sich sofort

Satz. Seien $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent sowie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Dann ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k)$ ebenfalls konvergent und es gilt

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k + \beta \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$.

Beispiel. (Wir setzen als bekannt voraus, dass $e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$)

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{3 \cdot 2^k - 5}{4^k k!} = 3 \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(\frac{1}{2})^k - 5 \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(\frac{1}{4})^k = 3e^{1/2} - 5e^{1/4}$.

Für eine Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt $s_{m,n} = \sum\limits_{k=m+1}^{n} a_k$ mit $n > m \geq 0$ ein **Teilstück** der Reihe.

$r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$ heißt ein **Endstück** der Reihe bzw. ein **Reihenrest**.

Weil $s_{m,n} = s_n - s_m$, ist die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ genau dann konvergent wenn

$\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ N_\varepsilon$ sodass $|s_{m,n}| = |\sum\limits_{k=m+1}^{n} a_k| < \varepsilon$ für $n > m > N_\varepsilon$.

Ist speziell $n = m + 1$, dann ist $|s_{m,m+1}| = |a_{m+1}|$. Dies liefert ein **notwendiges Kriterium** für die Konvergenz einer Reihe :

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent $\Rightarrow$ (a_k) ist eine Nullfolge.

Sei $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = s$ konvergent. Wegen $s - s_m = r_m$, muß die Folge der Reihenreste (r_m) eine Nullfolge sein, d.h. der "Reihenrest kann beliebig klein gemacht werden".

Offenbar ändert sich das Konvergenzverhalten einer Reihe nicht, wenn **endlich viele** Summanden weggelassen, hinzugefügt oder abgeändert werden.

Definitiion. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt **absolut konvergent**, wenn $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt **bedingt konvergent**, wenn die Reihe konvergiert, aber nicht absolut konvergent ist.

Bemerkungen. (i) Hat eine reelle Reihe nur positive Summanden, dann sind Konvergenz und absolute Konvergenz gleichbedeutend.

(ii) Wegen $|s_{m,n}| = |\sum_{k=m+1}^{n} a_k| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k|$ folgt aus der absoluten Konvergenz auch die Konvergenz der Reihe.

Beispiel. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\frac{1}{k}$ ist konvergent (siehe später) aber nicht absolut konvergent.

Satz. (**Vergleichskriterium**) Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ gegeben.

1) Gilt $|a_k| \leq c_k$ für fast alle k und ist $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ konvergent, dann ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent. ($\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ heißt dann eine konvergente **Majorante** von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$)

2) Gilt $|a_k| \geq d_k \geq 0$ für fast alle k und ist $\sum_{k=1}^{\infty} d_k$ divergent, dann ist $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ divergent. ($\sum_{k=1}^{\infty} d_k$ heißt dann eine divergente **Minorante** von $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$)

Beweis. 1) folgt aus $\sum_{k=m+1}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=m+1}^{n} c_k$.

zu 2) : Wäre $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergent, dann wegen 1) auch $\sum_{k=1}^{\infty} d_k$, ein

Widerspruch. $\square$

Beispiele.

1) Betrachte $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{5}{k2^k}$. Wegen $|a_k| = \frac{5}{k2^k} \leq 5\cdot\frac{1}{2^k}$ ist die geometrische Reihe $5\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k$ eine konvergente Majorante, also ist die gegebene Reihe absolut konvergent.

2) Betrachte $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1+\sqrt{k}}{k}$. Wegen $a_k = |a_k| = \frac{1+\sqrt{k}}{k} > \frac{1}{k}$, ist die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ eine divergente Minorante, also ist die gegebene Reihe divergent.

3) Betrachte $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k!}{k^k}$. Wegen $|a_k| = \frac{k!}{k^k} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots k}{k\cdot k\cdot k\cdots k} = \frac{2}{k^2}\cdot\frac{3}{k}\cdot\frac{4}{k}\cdots\frac{k}{k} < \frac{2}{k^2}$ ist $2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ eine konvergente Majorante der gegebenen Reihe, welche somit konvergiert.

Bemerkung. Bei zahlreichen reellen Reihen sind die einzelnen Reihenglieder ≥ 0 . In diesem Fall ist die Folge der Partialsummen monoton steigend.

Somit konvergiert eine derartige Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ genau dann, wenn die Folge (s_n) der Partialsummen (nach oben) beschränkt ist.

Ohne Beweis sei ein weiteres Ergebnis angeführt.

Satz. (**Verdichtungssatz** von Cauchy)

Sei $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ gegeben, wobei $a_k \geq 0 \;\; \forall\, k$ und die Folge (a_k) monoton fallend ist.

Dann ist $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ konvergent genau dann, wenn $\sum_{k=0}^{\infty}2^k a_{2^k}$ konvergiert.

Beispiel. Betrachte $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

Für $\alpha \leq 0$ bilden die Reihenglieder keine Nullfolge, daher ist in diesem Fall die Reihe divergent.

Für $\alpha > 0$ bilden die Reihenglieder eine monoton fallende Nullfolge, sodass der Verdichtungssatz anwendbar ist, d.h. wir betrachten die Reihe

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^\alpha} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (2^{1-\alpha})^k$.

Dies ist aber eine geometrische Reihe, die nur für $2^{1-\alpha} < 1$ konvergiert.

Also konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ nur für $\alpha > 1$. Im besonderen konvergiert damit etwa die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k}}$. $\square$

Ein weiteres wichtiges Kriterium sei ebenfalls ohne Beweis angeführt.

Satz. (**Grenzwertkriterium**)

Seien (a_k) und (b_k) Folgen positiver reeller Zahlen. Gilt $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = l$ mit $0 < l < \infty$, dann sind die beiden Reihen $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ entweder beide konvergent oder beide divergent.

Beispiel. Betrachte $\sum\limits_{k=2}^{\infty} a_k$ mit $a_k = \frac{k^2-2k+5}{k^4-3k^2+2k}$. Wähle $b_k = \frac{1}{k^2}$.

Dann gilt $\frac{a_k}{b_k} = \frac{k^4-2k^3+5k^2}{k^4-3k^2+2k} \to 1$ und somit ist $\sum\limits_{k=2}^{\infty} a_k$ konvergent.

Im folgenden werden zwei wichtige Kriterien für die absolute Konvergenz einer Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ diskutiert, nämlich das Wurzelkriterium und das Quotientenkriterium.

Satz. (**Wurzelkriterium**)

1) $\exists\, q \in \mathbb{R}$ mit $0 \le q < 1$ und $\sqrt[k]{|a_k|} \le q$ für fast alle $k \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ ist absolut konvergent.

2) Gilt $\sqrt[k]{|a_k|} \ge 1$ für unendlich viele k , dann ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent.

3) Gilt weder 1) noch 2), dann ist (vorderhand) keine Aussage möglich.

Beweis.

zu 1) : Es gilt $|a_k| \le q^k$ für fast alle k , und damit ist die geometrische Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k$ wegen $q < 1$ eine konvergente Majorante.

zu 2) : Gilt $\sqrt[k]{|a_k|} \ge 1$ für unendlich viele k , dann kann (a_k) keine Nullfolge sein, also ist die Reihe divergent.

zu 3) : Die Reihen $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ erfüllen weder 1) noch 2), jedoch ist die erste Reihe konvergent und die zweite Reihe divergent. $\square$

Satz. (**Quotientenkriterium**)

1) $\exists\, q \in \mathbb{R}$ mit $0 \le q < 1$ und $|\frac{a_{k+1}}{a_k}| \le q$ für fast alle $k \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ ist absolut konvergent.

2) Gilt $|\frac{a_{k+1}}{a_k}| \ge 1$ für fast alle k , dann ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent.

3) Gilt weder 1) noch 2), dann ist (vorderhand) keine Aussage möglich.

Beweis.

zu 1) : Es gelte $|\frac{a_{k+1}}{a_k}| \le q < 1$ für $k > N$. Dann ist für $k > N$

$|a_k| = |\frac{a_k}{a_{k-1}}||\frac{a_{k-1}}{a_{k-2}}| \ldots |\frac{a_{N+1}}{a_N}||a_N| \le q^{k-N}|a_N| = |\frac{a_N}{q^N}|q^k = cq^k$.

Wiederum ist die geometrische Reihe $c\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k$ eine konvergente Majorante.

zu 2) : Gilt $|\frac{a_{k+1}}{a_k}| \ge 1$ für fast alle k , dann kann (a_k) keine Nullfolge sein, also ist die Reihe divergent.

zu 3) : Die Reihen $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ erfüllen weder 1) noch 2), jedoch ist die erste Reihe konvergent und die zweite Reihe divergent. $\square$

Wichtige Bemerkung. Ist die Folge $(\sqrt[k]{|a_k|})$ (bzw. $(|\frac{a_{k+1}}{a_k}|)$) im besonderen konvergent (was ja nicht immer der Fall sein muß), also etwa $\sqrt[k]{|a_k|} \to q$ (bzw. $|\frac{a_{k+1}}{a_k}| \to q$), dann liegt für $q < 1$ absolute Konvergenz vor, für $q > 1$ Divergenz, und für $q = 1$ ist keine Aussage möglich.

Beispiele.

(a) Betrachte $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^4 e^{-k}$. Dann ist $|a_k| = \frac{k^4}{e^k}$ und

$\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{e}(\sqrt[k]{k})^4 \to \frac{1}{e} < 1$. Also ist die Reihe absolut konvergent.

(b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!} x^k$ konvergent?

$|\frac{a_{k+1}}{a_k}| = \frac{[(k+1)!]^2 (2k)! |x|^{k+1}}{(2k+2)! (k!)^2 |x|^k} = \frac{(k+1)^2 |x|}{(2k+1)(2k+2)} \to \frac{|x|}{4}$ für $k \to \infty$.

Somit ist die Reihe absolut konvergent für $\frac{|x|}{4} < 1$, i.e. für $|x| < 4$, und divergent für $|x| > 4$.

Für die Randpunkte $x = \pm 4$ ist eine gesonderte Untersuchung erforderlich.

Definition. Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ heißt **alternierend**, wenn zwei aufeinanderfolgende Summanden verschiedenes Vorzeichen haben. Somit kann eine derartige Reihe in der Form $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$ mit $a_k \geq 0$ geschrieben werden.

Für alternierende Reihen gilt folgendes wichtige hinreichende Kriterium

Satz. (**Leibniz-Kriterium**)

Sei die alternierende Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$ gegeben.

1) Ist (a_k) eine monotone Nullfolge, dann konvergiert die Reihe.

2) Ist $s = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$, dann gilt für die Teilsumme s_n die Abschätzung $|s_n - s| \leq a_{n+1}$.

Beispiel. Betrachte $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k^\alpha}$. Für $\alpha > 0$ bildet die Folge $(\frac{1}{k^\alpha})$ eine monoton fallende Nullfolge, und damit ist die Reihe nach dem Leibniz-Kriterium konvergent.

Im speziellen ist die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots$ konvergent.

Weitere Bemerkungen.

1) Sei $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ gegeben, und $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung.

Wir setzen $b_k = a_{\varphi(k)} \ \forall \ k$. Dann heißt $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ eine **Umordnung** von $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

Es gilt (ohne Beweis) :

(i) Ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent zur Summe s , dann konvergiert auch jede Umordnung von $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut und hat die gleiche Summe s .

(ii) (Umordnungssatz von Riemann) Sei $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ bedingt konvergent und $t \in \mathbb{R}$. Dann gibt es eine Umordnung $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ von $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ mit der Summe t .

2) Seien die Reihen $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ mit Summen s bzw. t gegeben.

Wir wollen die beiden Reihen in geeigneter Weise "multiplizieren" und als Ergebnis wieder eine Reihe erhalten. Dafür gibt es grundsätzlich mehrere Möglichkeiten.

Wir setzen $c_k = \sum\limits_{i=0}^{k} a_{k-i} b_i = a_k b_0 + a_{k-1} b_1 + \ldots + a_0 b_k$ für alle $k \geq 0$.

Also $c_0 = a_0 b_0$, $c_1 = a_1 b_0 + a_0 b_1$, $c_2 = a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2$ etc.

Die dadurch erhaltene Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k$ heißt das **Cauchy-Produkt** der Reihen $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$.

(Das Cauchy-Produkt tritt in natürlicher Weise bei der Produktbildung zweier Potenzreihen auf.)

Es gilt : Ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent zur Summe s und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent zur Summe t , dann konvergiert das Cauchy-Produkt der beiden Reihen zur Summe st .