Potenzreihen

Potenzreihen sind Funktionenreihen mit einer besonderen Gestalt.

Definition. Ist (a_k) eine Folge reeller (bzw. komplexer) Zahlen und $x_0 \in \mathbb{R}$ (bzw. $z_0 \in \mathbb{C}$), dann heißt die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ (bzw. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$) eine **Potenzreihe** mit **Entwicklungspunkt** x_0 (bzw. z_0) .

(Im folgenden verwenden wir die reelle Notation. Die Ergebnisse gelten aber auch sinngemäß im Komplexen. Statt Konvergenzintervalle treten dort dann Konvergenzkreisscheiben auf.)

Sei nun $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ eine Potenzreihe.
Es ist evident, dass die Potenzreihe an der Stelle $x = x_0$ konvergiert.

Nun betrachten wir die Folge $(\sqrt[k]{|a_k|})$. Ist $\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = +\infty$, dann hat $(\sqrt[k]{|a_k|})$ eine unbeschränkte Teilfolge und für jedes feste $x \neq x_0$ hat die Folge $(\sqrt[k]{|a_k|}|x-x_0|)$ ebenfalls eine unbeschränkte Teilfolge, und somit kann die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ nach dem Wurzelkriterium **nicht** konvergent sein. Wir setzen in diesem Fall $R = 0$.

Ist $\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 0$ und $x \neq x_0$, dann gilt $\sqrt[k]{|a_k|} \leq \frac{1}{2|x-x_0|}$ bzw. $\sqrt[k]{|a_k|}|x-x_0| \leq \frac{1}{2}$ für fast alle k . Nach dem Wurzelkriterium folgt damit die absolute Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$. Wir setzen in diesem Fall $R = \infty$.

Schließlich sei $0 < \limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < \infty$. Wir setzen $\frac{1}{R} = \limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$.

Für ein festes x mit $|x-x_0| < R$ gilt dann $\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < \frac{1}{|x-x_0|}$.

Wähle nun ein $\xi \in \mathbb{R}$ mit $\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < \xi < \frac{1}{|x-x_0|}$. Dann gilt

$\sqrt[k]{|a_k|} \leq \xi$ bzw. $\sqrt[k]{|a_k|}|x-x_0| \leq \xi|x-x_0| = q < 1$ für fast alle $k \in \mathbb{N}$.

Nach dem Wurzelkriterium liegt damit die absolute Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ vor.

Ist $|x-x_0| > R$, dann ist $\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} > \frac{1}{|x-x_0|}$ und $\sqrt[k]{|a_k|} \geq \frac{1}{|x-x_0|}$ bzw. $\sqrt[k]{|a_k|}|x-x_0| \geq 1$ für unendlich viele k .

Nach dem Wurzelkriterium liegt somit Divergenz vor.

Zusammenfassung. Setzen wir $\frac{1}{R} = \limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$, dann gilt für die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$:

- absolute Konvergenz, falls $|x-x_0| < R$
- Divergenz, falls $|x-x_0| > R$
- falls $|x-x_0| = R$, dann ist vorderhand keine Aussage möglich. Dieser Fall muß gesondert untersucht werden.

Falls $R = 0$, dann konvergiert die Reihe nur in $x = x_0$. Falls $R = \infty$, dann konvergiert die Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$.

Definition.

R heißt der **Konvergenzradius** der Potenzreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$.

Bemerkungen.

(i) Im allgemeinen ist also der Konvergenzbereich einer reellen Potenzreihe ein Intervall um den Entwicklungspunkt x_0 .

Für komplexe Potenzreihen wird entsprechend der Konvergenzbereich im allgemeinen eine Kreisscheibe um den Entwicklungspunkt z_0 sein.

(ii) Ist die Folge $(\sqrt[k]{|a_k|})$ konvergent, dann gilt offenbar

$$\frac{1}{R} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \ .$$

(iii) Durch analoge Überlegungen (mittels des Quotientenkriteriums) kann gezeigt werden :

Ist die Folge $\left(\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|\right)$ konvergent, dann gilt

$$\frac{1}{R} = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \ .$$

Beispiele.

1) Betrachte $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^k (x-2)^k$.

Wegen $\limsup\limits_{k\to\infty} |a_k|^{\frac{1}{k}} = \lim\limits_{k\to\infty} k = \infty$ ist $R = 0$.

2) Betrachte $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k} (x+1)^k$.

Wegen $\limsup\limits_{k\to\infty} |a_k|^{\frac{1}{k}} = 3 \lim\limits_{k\to\infty} \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}} = 3$ ist $R = \frac{1}{3}$. Die Potenzreihe konvergiert also (absolut) für alle x mit $|x+1| < \frac{1}{3}$, i.e. für alle x mit $-\frac{4}{3} < x < -\frac{2}{3}$.

3) Betrachte $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{\frac{1}{(k+1)!}}{\frac{1}{k!}}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+1} = 0 \ .$$ Also ist $R = \infty$.

Wie zuvor erwähnt, konvergieren Potenzreihen in symmetrischen Intervallen (bzw. Kreisscheiben) um einen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ (bzw. $z_0 \in \mathbb{C}$) . Im Hinblick auf gliedweise Integration bzw. Differentiation von Potenzreihen ist die Frage von Interesse, auf welchen Teilmengen der Konvergenzmenge gleichmäßige Konvergenz vorliegt.

Satz. Eine Potenzreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ mit Konvergenzradius R , $0 < R \le \infty$ konvergiert auf jeder **kompakten** Teilmenge der Konvergenzmenge gleichmäßig.

Beweis.

Zu jeder kompakten Menge $X \subseteq U_R(x_0) = \{x \ : \ |x-x_0| < R\}$ gibt es ein r mit $0 < r < R$ mit $X \subseteq U_r(x_0) \subseteq U_R(x_0)$. Dann ist aber die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k r^k$ gemäß früher absolut konvergent und wegen der auf X gültigen Abschätzung $|a_k(x-x_0)^k| \le |a_k| r^k$ nach dem Weierstrass Kriterium auf X gleichmäßig konvergent. $\square$

Satz. Sei $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R , $0 < R \le \infty$. Dann gilt für die von der Reihe erzeugte Funktion $A(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$:

1) $A(x)$ ist stetig auf $U_R(x_0)$,

2) $A(x)$ ist auf $U_R(x_0)$ beliebig oft differenzierbar, und es gilt dort für die n-te Ableitung

$$A^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k k(k-1)\cdots(k-n+1)(x-x_0)^{k-n} = n! \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} a_k(x-x_0)^{k-n}$$

wobei diese Potenzreihe ebenfalls den Konvergenzradius R besitzt,

3) $A(x)$ ist auf jedem Intervall $[a,b] \subseteq U_R(x_0)$ Riemann-integrierbar und die Potenzreihe darf gliedweise integriert werden, i.e.

$$\int_a^b A(x)dx = \int_a^b \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k \right) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k \int_a^b (x-x_0)^k dx \right) .$$

Beweis.

zu 1) : Sei $x \in U_R(x_0)$. Dann gibt es eine **kompakte** Umgebung $U(x)$ von x mit $U(x) \subseteq U_R(x_0)$. Auf $U(x)$ liegt gleichmäßige Konvergenz vor und nach einer früheren Aussage ist $A(x)$ damit stetig in x .

zu 2) : Wir zeigen zuerst, dass die Reihe der Ableitungen den gleichen Konvergenzradius R besitzt.

$$\sum_{k=1}^{\infty} ka_k(x-x_0)^{k-1} = \frac{1}{x-x_0} \sum_{k=1}^{\infty} ka_k(x-x_0)^k = \frac{1}{x-x_0} \sum_{k=1}^{\infty} b_k(x-x_0)^k$$

wobei $b_k = ka_k$.

$\frac{1}{R^*} = \limsup_{k\to\infty} |b_k|^{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} k^{\frac{1}{k}} \limsup_{k\to\infty} |a_k|^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{R}$, weil $\lim_{k\to\infty} k^{\frac{1}{k}} = 1$.

Die Reihe der Ableitungen konvergiert dann auf jeder kompakten Teilmenge X (insbesondere auf kompakten Umgebungen) von $U_R(x_0)$ gleichmäßig. Da die Potenzreihe selbst z.B. für x_0 konvergiert, ist nach einem früheren Satz die Summenfunktion in jedem $x \in U_R(x_0)$ differenzierbar und die Potenzreihe darf gliedweise differenziert werden.

Mittels vollständiger Induktion ergibt sich der Beweis für die höheren Ableitungen.

zu 3) : $A(x)$ ist stetig auf $[a,b]$ und $a_k(x-x_0)^k$ ist Riemann-integrierbar auf $[a,b]$. Gemäß früher ist dann auch $A(x)$ Riemann-integrierbar auf $[a,b]$ und die Potenzreihe darf gliedweise integriert werden. Der Konvergenzradius der gliedweise integrierten Potenzreihe ist (analog zur gliedweise differenzierten Potenzreihe) wiederum R . $\square$

Eine weitere wichtige Aussage ist durch folgendes Ergebnis gegeben.

Satz. Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R , $0 < R \leq \infty$, und bezeichne $A(x)$ die Summenfunktion.

Dann gilt für alle $n \geq 0$, dass $a_n = \frac{A^{(n)}(x_0)}{n!}$, d.h. es ist

$$A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k .$$

Beweis. $A^{(n)}(x) = n! \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} a_k(x-x_0)^{k-n}$. Für $x = x_0$ folgt dann $A^{(n)}(x_0) = n!a_n$. $\square$

Bemerkungen.

(i) $A(x)$ ist auf $U_R(x_0)$ bereits durch die Werte auf einer beliebig kleinen Umgebung von x_0 vollständig bestimmt.

(ii) Potenzreihen erscheinen formal als Polynome "unendlich hohen Grades". Bei Polynomen wissen wir, dass zwei Polynome vom Grad n identisch sind, wenn sie an mindestens $n+1$ Stellen übereinstimmen. Für zwei Potenzreihen ist es allerdings nicht ausreichend, dass sie nur an unendlich vielen Punkten übereinstimmen, wie das Beispiel der beiden Funktionen $f(x) = \sin(\pi x)$ und $g(x) \equiv 0$ zeigt, die an allen ganzzahligen x übereinstimmen, aber nicht identisch sind.

Satz. (**Identitätssatz für Potenzreihen**)

Besitzen $A(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ und $B(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_0)^k$ an unendlich vielen von x_0 verschiedenen Stellen $x_1, x_2, \ldots$, die sich an x_0 häufen, denselben Wert, i.e. $A(x_i) = B(x_i)$, dann gilt $a_k = b_k \quad \forall\ k$, d.h. $A(x) = B(x)$ auf $X = U_{R_1}(x_0) \cap U_{R_2}(x_0)$.

Bemerkung. Dieser Identitätssatz wird in der Funktionentheorie verallgemeinert und ist dort ein mächtiges Werkzeug zum Beweis vieler Sätze (z.B. die Eindeutigkeit der Fortsetzung von holomorphen Funktionen).