Mittelwertsatz, Satz von Taylor

Satz. (**1. Mittelwertsatz**)
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar auf der offenen Menge $X \subseteq D(f)$. Ferner seien $p, q \in X$, sodass die Verbindungsstrecke $\overline{pq}$ zwischen p und q in X liegt.

Dann existiert ein $\vartheta \in (0,1)$ mit

$$f(q) - f(p) = \mathrm{grad} f(p + \vartheta(\vec{q} - \vec{p})) \cdot (\vec{q} - \vec{p}) \ .$$

Beweis.
Für $x \in \overline{pq}$ ist $x = p + t(\vec{q} - \vec{p})$ für ein geeignetes $t \in [0,1]$.

Betrachte nun $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $F(t) = f(p + t(\vec{q} - \vec{p}))$.

Dann ist F stetig und auf $(0,1)$ differenzierbar. Damit sind aber die Voraussetzungen des 1. MWS für Funktionen einer reellen Variablen erfüllt und es gilt $F(1) - F(0) = F'(\vartheta)$ für ein geeignetes $\vartheta \in (0,1)$.

Mit der Kettenregel gilt dann

$$F(1) - F(0) = f(q) - f(p) = \mathrm{grad} f(p + \vartheta(\vec{q} - \vec{p})) \cdot (\vec{q} - \vec{p}) \ . \quad \square$$

Folgerung. Auf konvexen Teilmengen $X \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt der 1. MWS für jede Funktion $f \in C^1(X)$.

Bemerkung. (Veranschaulichung im $\mathbb{R}^2$)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $p = (x_1, y_1)$ und $q = (x_2, y_2)$. Dann ist

$$p + \vartheta(\vec{q} - \vec{p}) = (x_1 + \vartheta(x_2 - x_1), y_1 + \vartheta(y_2 - y_1)) = (\xi, \eta) \ .$$

Sind also die Voraussetzungen des 1. MWS erfüllt, dann existiert ein $\vartheta \in (0,1)$ mit

$$f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1) = f_x|_{(\xi,\eta)} (x_2 - x_1) + f_y|_{(\xi,\eta)} (y_2 - y_1) \ .$$

Im eindimensionalen Fall gilt, dass eine auf einem Intervall differenzierbare Funktion mit verschwindender Ableitung dort konstant sein muss.

Die entsprechende Verallgemeinerung von "Intervall" ist nun die folgende wichtige Teilmenge des $\mathbb{R}^n$.

Definition. Eine **offene** Teilmenge $G \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt ein **Gebiet**, wenn für alle $x, y \in G \quad \exists\ x = x^1, x^2, ..., x^m = y$ mit $\overline{x^i x^{i+1}} \subseteq G$ für $i = 1, 2, ..., m-1$.

(D.h. je zwei Punkte von G können durch einen Streckenzug verbunden werden)

Satz. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, G ein Gebiet und $f \in C^1(G)$. Dann gilt

$$f \text{ ist konstant auf } G \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{grad} f(x) = \vec{0} \quad \forall\ x \in G \ .$$

Beweis. Ist f konstant, dann ist offenbar $\mathrm{grad} f(x) = \vec{0}\ \ \forall\ x \in G$.

Zum Beweis der Umkehrung wähle $x, y \in G$ und weitere Punkte $x^2, ..., x^{m-1}$ wobei $x = x^1$, $y = x^m$ und $\overline{x^i x^{i+1}} \subseteq G$ für $i = 1, 2, ..., m-1$.

Sukzessive Anwendung des 1. MWS liefert $f(x^{i+1}) = f(x^i)$ und schließlich $f(x) = f(y)$. $\square$

Wie im eindimensionalen Fall läßt sich eine Funktion $f \in C^{m+1}(X)$ durch ein Polynom (in n Variablen) vom Grad m approximieren.

Dazu betrachten wir für $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$ den Differentialoperator $\vec{h} \cdot \mathrm{grad}$, der einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f \in C^1(X)$ die Funktion

$$(\vec{h} \cdot \mathrm{grad}) f(x) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

zuordnet.

Für $k \in \mathbb{N}$ ist dann $(\vec{h} \cdot \mathrm{grad})^k$, die k-fache Anwendung des Differentialoperators, für eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f \in C^k(X)$ gegeben durch

$$(\vec{h} \cdot \mathrm{grad})^k f(x) = \sum_{\nu_1=1}^{n} \sum_{\nu_2=1}^{n} ... \sum_{\nu_k=1}^{n} h_{\nu_1} h_{\nu_2} ... h_{\nu_k} \frac{\partial^k f}{\partial x_{\nu_1} \partial x_{\nu_2} ... \partial x_{\nu_k}}(x) \ .$$

Satz. (**TAYLOR**)

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $f \in C^{m+1}(X)$. Weiters seien $x^0, x \in X$ mit $\overline{x^0 x} \subseteq X$.

Dann gilt mit $\vec{h} = \vec{x} - \vec{x}^0$ und einem geeigneten $\vartheta \in (0,1)$

$$f(x) = f(x^0) + \sum_{k=1}^{m} \frac{\left((\vec{h}\cdot\mathrm{grad})^k f(x^0)\right)}{k!} + \frac{1}{(m+1)!}\left((\vec{h}\cdot\mathrm{grad})^{m+1} f(x)\right)\Big|_{x=x^0+\vartheta\vec{h}}$$

Bemerkungen.

(i) Für $m = 0$ ergibt sich der Mittelwertsatz als Spezialfall des Satzes von Taylor.

(ii) Für $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $m = 1$ erhalten wir

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x_0, y_0) +$$

$$+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0 + \vartheta h, y_0 + \vartheta k) =$$

$$= f(x_0, y_0) + hf_x(x_0, y_0) + kf_y(x_0, y_0) + \frac{1}{2!}(h^2 f_{xx}(x_0 + \vartheta h, y_0 + \vartheta k) +$$

$$+2hkf_{xy}(x_0 + \vartheta h, y_0 + \vartheta k) + k^2 f_{yy}(x_0 + \vartheta h, y_0 + \vartheta k))\ .$$

(iii) Wie im eindimensionalen Fall schreibt man bisweilen

$$f(x) = T_m(x, x^0) + R_m(x, x^0)\ .$$

Für $f \in C^\infty(X)$ sind die $T_m(x, x^0)$ die Partialsummen der Taylor-Reihe. Diese stellt die Funktion f dar, wenn $\lim\limits_{m\to\infty} R_m = 0$.