Übungsblatt 1 – Differenzial- und Integralrechnung, WS 09/10

1. **Äquivalenzumformungen und logisches Schließen:**

   (a) Finden Sie den Fehler in folgender Rechnung:

$$
\begin{aligned}
1 &= x && \big|\cdot x \\
x &= x^2 && \big|-1 \\
x-1 &= x^2-1 \\
x-1 &= (x+1)\cdot(x-1) && |/(x-1) \\
\frac{x-1}{x-1} &= \frac{(x+1)\,(x-1)}{x-1} \\
1 &= x+1 && \big|x=1 \\
1 &= 2
\end{aligned}
$$

   (b) Ist der folgende Schluss logisch richtig?
   („Wer von der Quantenmechanik nicht schockiert ist, der hat sie nicht verstanden“ [Niels Bohr] *und* „Niemand versteht die Quantenmechanik“ [Richard Feynman]) $\Rightarrow$ „Niemand ist von der Quantenmechanik schockiert“

2. **Eigenschaften von Zahlenmengen:**
   Klassifizieren Sie die folgenden Mengen $M_i \subseteq \mathbb{R}$ nach den Kriterien *offen*, *abgeschlossen*, *nach oben/unten beschränkt* und *kompakt*. Bestimmen Sie außerdem, falls sie existieren, $\inf M_i$ und $\sup M_i$. Sind diese Elemente der Menge M_i?

$$
\begin{array}{llll}
M_1 = (-1,\,1), & M_2 = [-1,\,1), & M_3 = (-1,\,1], & M_4 = [-1,\,1], \\
M_5 = (-\infty,\,0), & M_6 = (0,\,\infty) & M_7 = M_5 \cup M_6, & M_8 = M_4 \setminus \{0\} \\
M_9 = \mathbb{Z}, & M_{10} = \mathbb{Z} \cup (-1,\,1), & M_{11} = \mathbb{Z} \cup (-\frac{3}{2},\,\frac{3}{2}), & M_{12} = [-10,10] \setminus \mathbb{Z},
\end{array}
$$

$$M_{13} = \bigcap_{n=1}^{\infty} (-\tfrac{1}{n},\,\tfrac{1}{n}) = (-1,\,1) \cap (-\tfrac{1}{2},\,\tfrac{1}{2}) \cap (-\tfrac{1}{3},\,\tfrac{1}{3}) \cap \ldots$$

3. **Rechnen mit Ungleichungen und Beträgen:**
   Bestimmen Sie jeweils alle $x \in \mathbb{R}$, die die folgenden Ungleichungen erfüllen:

   (a) $\dfrac{|x-2|\cdot(x+2)}{x} < |x|$

   (b) $\left|x^2-4\right| - |x+2|\left(x^2+x-6\right) > 0$

4. **Einige spezielle Metriken:**
Zeigen Sei jeweils, dass in den folgenden Fällen $(M,\, d)$ ein metrischer Raum ist. Veranschaulichen Sie sich die Bedeutung von d (soweit möglich) geometrisch.

   (a) *diskrete Metrik:* In einer beliebigen Menge M definieren wir
$$d(x,\, y) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } x = y \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

   (b) *Manhattan-Metrik:* In $M = \mathbb{R}^2$ definieren wir den Abstand zwischen zwei Punkten $\boldsymbol{x} = (x_1,\, x_2)$ und $\boldsymbol{y} = (y_1,\, y_2)$ als
$$d(\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \,.$$

   (c) *Euklidische Metrik:* In $M = \mathbb{R}^2$ definieren wir den Abstand zwischen zwei Punkten $\boldsymbol{x} = (x_1,\, x_2)$ und $\boldsymbol{y} = (y_1,\, y_2)$ nun als
$$d(\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{y}) = d_{\mathrm{E}}(\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \,.$$
(Hinweis: Setzen Sie im Beweis der Dreiecksungleichung $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}\| \le \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}\|$ zur Vereinfachung der Notation $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$ und $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}$.)

   (d) *Französische Eisenbahnmetrik:* Wir setzen in $M = \mathbb{R}^2$ den Euklidischen Abstand $d_{\mathrm{E}}(\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$ als bekannt voraus. Nun wählen wir einen festen Punkt $\boldsymbol{p}$ (=Paris) und definieren den Abstand d als
$$d(\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{y}) = \begin{cases} d_{\mathrm{E}}(\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{y}) & \text{wenn } \boldsymbol{x},\, \boldsymbol{y} \text{ und } \boldsymbol{p} \text{ auf einer Geraden liegen} \\ d_{\mathrm{E}}(\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{p}) + d_{\mathrm{E}}(\boldsymbol{p},\, \boldsymbol{y}) & \text{sonst.} \end{cases}$$

5. **Ungleichungen mit Kehrwerten:**

   (a) Zeigen Sie für beliebige positive Zahlen x und y die Ungleichung
$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \ge 2 \,.$$

   (b) Die Zahlen a_k mit $k \in \mathbb{N}$ seien alle positiv. Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}$
$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} \right) \ge n^2 \,.$$

6. **Schaltung von Widerständen:**
Für zwei in Serie geschaltete Widerstände R_1 und R_2 gilt $R_{\mathrm{ges}} = R_1 + R_2$,
bei Parallelschaltung erhält man
$$\frac{1}{R_{\mathrm{ges}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \,.$$
Beweisen Sie, dass für eine beliebige Zahl n von Widerständen bei serieller Schaltung
$$R_{\mathrm{ges}} = \sum_{k=1}^{n} R_k,$$
und bei Parallelschaltung
$$\frac{1}{R_{\mathrm{ges}}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k}$$
gilt.