Übungsblatt 2 – Differenzial- und Integralrechnung, WS 09/10

1. **Zweite Dreiecksungleichung:** Zeigen Sie für alle $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}$:

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$$

2. **Beziehungen zwischen Binomialkoeffizienten:** Es gilt (siehe Vorlesung)

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k} \qquad \text{mit} \qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

   Zeigen Sie die folgenden Beziehungen zwischen den Binomialkoeffizienten:

   - Symmetrie: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
   - Summenformeln: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ und $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$
   - Pascal'sche Formel: $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

3. **Beweis von Summenformeln per Induktion:** Man zeige für $n \in \mathbb{N}$:

   - geometrische Summenformel: $\sum_{k=0}^{n} q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ für $q \neq 1$
   - $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$
   - $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{n\,(n+1)}{2}\right\}^2$

4. **Teilbarkeit mittels vollständiger Induktion:** Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$:

   - $7^n - 2^n$ ist durch 5 teilbar.
   - $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ ist durch 133 teilbar.
   - $n^p - n$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ durch p teilbar, sofern p eine Primzahl ist

5. **Eine Teleskopsumme:** Finden Sie für $n \in \mathbb{N}$ einen geschlossenen Ausdruck für

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

   und beweisen Sie dessen Richtigkeit durch vollständige Induktion. Bestimmen Sie anschließend den Wert der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}\,.$$

6. **Eigenschaften von Folgen:** Klassifizieren Sie die angegeben Folgen (a_n), (b_n), ... nach den Kriterien *nach oben/unten beschränkt*, *(streng) monoton wachsend/fallend*, *konvergent/divergent* und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert bzw. die Häufungspunkte:

   (a) $a_n = 1 + \dfrac{1}{n}$

   (b) $b_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$

   (c) $c_n = (-1)^n \left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)$

   (d) $d_n = \dfrac{n^2 + n - 1}{2n^2 + 3n + 4}$

   (e) $e_n = \begin{cases} \frac{n^3-3}{3n^3+3} & \text{wenn } n \text{ ungerade} \\ \frac{n^4-4}{4n^4+4} & \text{wenn } n \text{ gerade} \end{cases}$

7. **Babylonisches Wurzelziehen:** Wir definieren eine rekursive Folge (a_n) mittels

$$a_1 = 1 \qquad \text{und} \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}$$

   und eine Folge (b_n) mittels $b_n = a_n^2$.

   - Bestimmen Sie die ersten Glieder der Folge (a_n).
   - Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion $1 \leq a_n \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
   - Zeigen Sie (etwa durch sorgfältiges Betrachten der Differenz $b_n - 2$) die Ungleichung $b_n \geq 2$ für $n \geq 2$.
   - Zeigen Sie induktiv $b_n \leq 2 + \frac{1}{2^n}$ für $n \geq 2$.
   - Sind die Folgen (a_n) und (b_n) konvergent? Wenn ja, welche Grenzwerte besitzen sie?

8. **Die Fibonacci-Folge:** Leonardo von Pisa, besser bekannt als *Fibonacci*, stellte im Jahre 1202 die folgende Aufgabe (zitiert nach H. Heuser, Lehrbuch der Analysis I):

   > Jemand brachte ein Kaninchenpaar in einen gewissen, allseits von Wänden umgebenen Ort, um herauszufinden, wieviel [Paare] aus diesem Paar in einem Jahr entstehen würden. Es sei die Natur der Kaninchen, pro Monat ein neues Paar hervorzubringen und im zweite Monat nach der Geburt [erstmals] zu gebären. [Todesfälle jedoch mögen nicht eintreten.]

   So biologisch fragwürdig die Aufgabenstellung auch sein mag, führt sie doch zu direkt auf eine der bedeutendesten Folgen überhaupt, die Fibonacci-Folge

$$a_1 = a_2 = 1, \qquad a_{n+2} = a_n + a_{n+1} \text{ für } n \in \mathbb{N}\,.$$

   Zeigen Sie, dass die explizite Darstellung

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right)$$

   gilt und bestimmen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

   (Hinweis: Setzen Sie $c = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $d = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Dann sind $x = c$ und $x = d$ Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 - x - 1 = 0$ und erfüllen daher die Identität $c^n(c^2 - c - 1) = d^n(d^2 - d - 1)$.)