Übungsblatt 4 – Differenzial- und Integralrechnung, WS 09/10

1. **Ungleichungen und Fallunterscheidungen:** Skizzieren Sie die durch folgende Ungleichungen beschriebenen Teilmengen von $\mathbb{C}$:

   - $z\,\bar{z} < 4$
   - $|z| < \sqrt{5} \cdot \operatorname{Re} z$
   - $|z+2| + |z-2| \leq 5$

2. **Weitere Summenformeln:** Beweisen Sie für (a) induktiv (b) durch Zurückführen auf bereits bekannte Summenformel die folgenden Beziehungen:

   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 3^k = \frac{3}{2}\,(3^n - 1)$

   (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$

3. **Ein Teleskop-Produkt:** Beweisen Sie für $n > 2$:

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1 \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 \cdots \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = \frac{n^n}{n!}$$

4. **Konvergenz von Folgen:** Untersuchen Sie die Folgen (a_n), (b_n), … auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert bzw. die Menge der Häufungspunkte:

   - $a_n = \dfrac{n^3 + 2n^2 + 3n + 4}{4n^3 + 3n^2 + 2n + 1}$
   - $b_n = \pi + \dfrac{\sin(\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$
   - $c_n = \begin{cases} 1 - \frac{1}{n} & \text{wenn die Dezimaldarstellung von } n \text{ eine 7 enthält} \\ \frac{1}{n} & \text{sonst} \end{cases}$

5. **Eine rekursive Folge:** Betrachten Sie beiden rekursive gegebenen Folgen

$$a_1 = \frac{1}{4}\,, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{4} + a_n^2$$
$$b_1 = \frac{3}{4}\,, \qquad b_{n+1} = \frac{1}{4} + b_n^2$$

   Bestimmen Sie jeweils die ersten Folgenglieder und geben Sie eine Vermutung über die Konvergenz ab. Was können Sie über Monotonie und Beschränktheit aussagen? Wenn eine Folge (c_n) der Rekursionsvorschrift

$$c_{n+1} = \frac{1}{4} + c_n^2$$

   gehorcht, für welche Startwerte c_1 ist sie konvergent bzw. divergent?

6. **Konvergenz von Reihen:** Überprüfen Sie mittels eine geeigneten Kriteriums die Konvergenz der folgenden Reihen:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{n}{5^n}$

   (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3+n+1}{n^7-2n+2}$

   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+\frac{1}{n}}$

   (e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+1+\arctan(n\pi)}$

   (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}\cdot n}$

7. **Gleichmäßige Konvergenz einer Funktionenfolge:** Man untersuche die Funktionenfolge

$$f_n(x) = x^n(1-x^n)$$

   auf $X = [0,\,1]$ auf gleichmäßige Konvergenz.

8. **Konvergenz einiger Funktionenreihen:** Bestimmen Sie jeweils das maximale offene Intervall $I \subset \mathbb{R}$, auf dem die folgenden Reihen konvergieren ($x \in I$):

   (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{n+1}(x-1)^n$

   (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n$

   (c) $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$

   (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{1+n^2}$