Übungsblatt 5 – Differenzial- und Integralrechnung, WS 09/10

1. **Körperstruktur von $\mathbb{C}$:** Wir definieren in $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ die Verknüpfungen
$$(a,\, b) \oplus (c,\, d) := (a + c,\, b + d)\,,$$
$$(a,\, b) \otimes (c,\, d) := (ac - bd,\, ad + bc)\,.$$
Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}^2, \oplus, \otimes)$ ein Körper ist.

2. **Rechnen mit komplexen Zahlen:** Man bestimme für
   - $z_1 = 1 + \sqrt{3}\, i$ und $z_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}} - i$,
   - $z_1 = 1 - i$ und $z_2 = i$,
   - $z_1 = \sqrt{6} + \sqrt{2}\, i$ und $z_2 = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\, i$

   jeweils $|z_1|$, $\operatorname{Arg} z_1$, $|z_2|$, $\operatorname{Arg} z_2$, $|z_1 z_2|$, $\operatorname{Arg}(z_1 z_2)$, $|\frac{z_1}{z_2}|$ und $\operatorname{Arg}(\frac{z_1}{z_2})$.

3. **Komplexe Potenzreihen:** Bestimmen Sie jeweils den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen und skizzieren Sie den Konvergenzbereich in der Gauß'schen Zahlenebene:
   - $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\,(1+\mathrm{i})^n}\,(z - 1 - \mathrm{i})^n$
   - $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n - 1}(z + 1)^n$
   - $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, 4^n\, z^{2n}$

4. **Formeln von Moivre:** Für die komplexe Exponentialfunktion gilt die Formel von Moivre
$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi} = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right)^n\,.$$
Zeigen Sie mit dieser Beziehung und mit der Euler'schen Formel
$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos(x) + \mathrm{i}\,\sin(x).$$
die folgenden Identitäten:
   - $\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$ und $\sin 2\varphi = 2\cos\varphi\sin\varphi$,
   - $\cos 4\varphi = 8\cos^4\varphi - 8\cos^2\varphi + 1$,
   - $\cos 5\varphi = 16\cos^5\varphi - 20\cos^3\varphi + 5\cos\varphi$.

5. **Komplexe Einheitswurzeln:** Bestimmen Sie alle Zahlen z_k für die gilt $z_k^6 = 1$ und skizzieren Sie sie in der Gauß'schen Zahlenebene. Bestimmen Sie die Summe aller dieser Zahlen.

6. **Nullstellen:** Wir betrachten ein Polynom mit *reellen* Koeffizienten a_k,
$$P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$$
Beweisen Sie, dass wenn z_0 eine Nullstelle von P ist, das auch für $\bar{z}_0$ gilt.

   Das Polynom $P(z) = z^4 + z^3 - 5z^2 + z - 6$ hat die Nullstelle $z_1 = +\mathrm{i}$. Man finde die übrigen drei Nullstellen des Polynoms.