# Übungsblatt 6 – Differenzial- und Integralrechnung, WS 09/10

*Auch meinte ich in meiner Unschuld, daß es für den Physiker genüge, die elementaren mathematischen Begriffe klar erfaßt und für die Anwendungen bereit zu haben, und daß der Rest in für den Physiker unfruchtbaren Subtilitäten bestehe – ein Irrtum, den ich erst später mit Bedauern einsah.*

Albert Einstein

1. **Stetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit:** Zeigen Sie mit Hilfe des $\varepsilon$-$\delta$-Kriteriums, dass die Funktionen

   - $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = x^2$
   - $g\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$

   jeweils

   (a) an jedem Punkt in ihrem Definitionsbereich stetig sind,

   (b) in ihrem Definitionsbereich nicht gleichmäßig stetig sind.

2. **Stetigkeitsuntersuchung:** Überprüfen Sie, ob die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to [-1, 1], \quad f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{wenn } x \neq 0 \\ 0 & \text{wenn } x = 0 \end{cases}$$

   an der Stelle $x = 0$ stetig ist.
   (Hinweis: Gilt für alle Folgen $(x_n)$ mit $x_n \to 0$ auch $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(0)$?)

3. **Einige elementare Grenzwerte:** Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

   (a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 + x - 1}{3x^3 - 2x^2 + x - 1}$

   (b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

   (c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$

   (d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\arctan x}{x^2 + 1}$

4. **Stetiges Weiterführen:** Bestimmen Sie die Konstanten $a$ und $b$ jeweils so, dass die folgenden Funktionen $f$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig sind:

   (a) $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{für } x < -2 \\ (x - a)^2 & \text{für } -2 \leq x < 2 \\ \sqrt{x + b} & \text{für } 2 \leq x \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^x & \text{für } x < 0 \\ a + \frac{\cosh x}{2} & \text{für } 0 \le x < \ln 2 \\ x - b & \text{für } \ln 2 \le x \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{für } x < -1 \\ (ax+b)^2 & \text{für } -1 \le x < 1 \\ 4x + 12 & \text{für } 1 \le x \end{cases}$

5. **Stetiges Ergänzen:** Bestimmen Sie die Konstante $a$ bzw. die Konstanten $a$ und $b$ so, dass die folgenden Funktionen auf $D(f) = \mathbb{R}$ stetig sind:

(a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 9x}{x+3} & \text{für } x \neq -3 \\ a & \text{für } x = -3 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} x^3 + \cos x + a & \text{für } x > 0 \\ b & \text{für } x = 0 \\ -f(-x) & \text{für } x < 0 \end{cases}$

6. **Polarkoordinaten:** Die Umrechnung zwischen kartesischen Koordinaten $(x, y)$ und Polarkoordinaten $(r, \varphi)$ erfolgt mittels

$$\begin{aligned} x &= r \cos\varphi \\ y &= r \sin\varphi \end{aligned} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan\varphi &= \frac{y}{x} \quad \text{wenn } x \neq 0. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie rechnerisch die Polarkoordinaten der folgenden vier Punkte:
$\boldsymbol{p}_1 = (1,1)$, $\boldsymbol{p}_2 = (1,-1)$, $\boldsymbol{p}_3 = (-1,1)$ und $\boldsymbol{p}_4 = (-1,-1)$.

**Ode an die Arcustangens-Schlange**[a]

*Du schleichst seit undenklichen Zeiten*
*so leis und so sanft heran,*
*Du stiegst in Ewigkeiten*
*kaum um ein Delta an.*
*Nur langsam beginnst Du zu wachsen,*
*wie zum Beweis Deines Seins,*
*erreichst beim Schnittpunkt der Achsen*
*Deine höchste Steigung, die Eins.*
*Dann duckst Du Dich wieder zierlich*
*in stiller Bescheidenheit*
*und wandelst weiter manierlich*
*in die Unendlichkeit.*

*Hier stock ich im Lobgesange,*
*mir schwant, er wird mir vermiest:*
*Oh, Arcustangens-Schlange,*
*beisst du nicht doch, Du Biest?!*

[a] aus H. Cremer, *Carmina Mathematica*