Übungsblatt 7 – Differenzial- und Integralrechnung, WS 09/10

1. **Bilden von Ableitungen:** Bilden Sie die Ableitung f_i' der folgenden Funktionen:

$$f_1(x) = \sin(2x), \qquad f_2(x) = \sin(2x)\,\mathrm{e}^{5x}, \qquad f_3(x) = \sin\left(2\,\mathrm{e}^{5\,\sin(2x)}\right),$$
$$f_4(x) = x^x, \qquad f_5(x) = (x^x)^x, \qquad f_6(x) = x^{(x^x)}$$

   mit $D(f_i) = \mathbb{R}$ für $i = 1, 2, 3$ und $D(f_i) = \mathbb{R}^+$ für $i = 4, 5, 6$. [*Hinweis:* $a^b = \mathrm{e}^{b\,\ln a}$]

2. **Symmetrie von Ableitungen:** Beweisen oder widerlegen Sie: *Die Ableitung eines geraden (symmetrischen) Polynoms ist ein ungerades (antisymmetrisches) Polynom und umgekehrt.*

3. **Kurvendiskussion:** Diskutieren Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^2\,\mathrm{e}^{-x^2}$$

   (Wertebereich, Nullstellen, Lage und Art der Extrema, Monotonie, Wendepunkte, Konvexität, Asymptoten, Skizze)

4. **Polynom-Splines:** Bestimmen Sie Polynome p und q mit den folgenden Eigenschaften:

   - $p(-1) = 1$, $p'(-1) = -1$, $p(1) = 1$, $p'(1) = 1$
   - $q(0) = 1$, $q'(0) = 0$, $q(1) = -1$, $q'(1) = 0$

5. **Differenzierbares Fortsetzen:** Bestimmen Sie die Konstanten a, b, c und d so, dass die folgende Funktion f auf ganz $D(f) = \mathbb{R}$ differenzierbar ist:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + \cos(x+1) & \text{für } x < -1 \\ ax + b & \text{für } -1 \le x < 1 \\ c\,\mathrm{e}^{x-1}(x^2 + d) & \text{für } 1 \le x \end{cases}$$

6. **Taylor-Polynome:** Bestimmen Sie die Taylorpolynome vom Grad n der folgenden Funktionen f_i um die Stelle x_0:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \mathrm{e}^{\cos x}, & x_0 &= 0, & n &= 2 \\ f_2(x) &= \ln(\sin x), & x_0 &= \tfrac{\pi}{2}, & n &= 3 \\ f_3(x) &= \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{1+x^2}, & x_0 &= 0, & n &= 6 \end{aligned}$$

7. **Relativistische Energie:** Nach der Speziellen Relativitätstheorie ist die Energie eines Körpers der Ruhemasse m_0 mit Geschwindigkeit v gegeben durch

$$E(v) = m(v)\,c^2 = \frac{m_0\,c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

   Entwickeln Sie $E(v)$ um $v = 0$ in ein Taylorpolynom zweiter Ordnung.

8. **Euler'sche Formel:** Zeigen Sie die Euler'sche Formel

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i}\,\sin x$$

durch Benutzung der Taylorreihen der elementaren Funktionen.

9. **Taylor-Reihe:** Bestimmen Sie einen allgemeinen Ausdruck für die n-te Ableitung der Funktion

$$f(x) = \sqrt{1+x}\,, \qquad D(f) = [-1,\,\infty)$$

an der Stelle $x = 0$ und beweisen Sie dessen Gültigkeit mittels vollständiger Induktion. Geben Sie die Taylor-Reihe der Funktion um $x_0 = 0$ an und bestimmen Sie deren Konvergenzradius.

10. **Lineare Unabhängigkeit:** Bestimmen Sie für die Funktionen

$$f_1(x) = x^3 \quad \text{und} \quad f_2(x) = |x|^3,$$

$D(f_1) = D(f_2) = \mathbb{R}$ die Wronski-Determinante

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix}.$$

Sind die beiden Funktionen linear unabhängig (d.h. folgt aus $\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ zwangsläufig $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$)?

11. **Grenzwertbestimmungen:** Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$G_1 = \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}\,, \qquad G_2 = \lim_{x\to \mathrm{e}} \frac{\mathrm{e} - x}{1 - \ln x}\,, \qquad G_3 = \lim_{x\to \pi} \frac{\sin^2 x}{(x-\pi)^2}\,,$$

$$G_4 = \lim_{x\to 0^+} x \ln x, \qquad G_5 = \lim_{x\to 0^+} x^x, \qquad G_6 = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \tan x\,,$$

$$G_7 = \lim_{x\to 0} \frac{\sinh^2 x}{\sinh(x^2)}\,, \qquad G_8 = \lim_{x\to 0} \left[\cos^2\left(\frac{\cos x - 1}{x^2}\right) + \sin^2\left(\frac{\mathrm{e}^x - 1 - x}{x^2}\right)\right],$$

$$G_9 = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}, \qquad G_{10} = \lim_{x\to \infty} \frac{\sinh x}{x^2 + \mathrm{e}^x}\,, \qquad G_{11} = \lim_{x\to \pi^-} (\sin x)^{\pi - x}$$

12. **Stetiges Ergänzen:** Wählen sie die Konstanten a_1 und a_2 so, dass die folgende Funktionen f in ganz $D(f) = \mathbb{R}$ stetig ist:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x\pi)}{x^2 - 4} & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{-2,\,2\} \\ a_1 & \text{für } x = -2 \\ a_2 & \text{für } x = 2 \end{cases}$$

13. **Ungleichungen aus konvexen Funktionen:** Beweisen Sie die Ungleichung

$$\ln x > \frac{x-1}{x} \quad \text{für } x > 1$$

durch Anwendung des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung auf die Funktion $f(t) = \ln t$ im Intervall $[1,\,x]$.