Übungsblatt 8 – Differenzial- und Integralrechnung, WS 09/10

1. **Grenzwertbestimmungen:** Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$G_1 = \lim_{x\to\sqrt{\pi}} \frac{\sin(x^2)}{x^2-\pi}\,, \qquad G_2 = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x - \frac{x^2}{2}}{(1-\mathrm{e}^x)^4}\,,$$

$$G_3 = \lim_{x\to 0^+} (\sinh x)^{\sin x}\,, \qquad G_4 = \lim_{x\to\infty} (\cosh x)^{1/x},$$

$$G_5 = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1-x}{x} - \frac{1}{\sin x}\right), \qquad G_6 = \lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)$$

2. **Stetigkeit und Differenzierbarkeit:** Untersuchen Sie die Funktionen $f_n\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n \cos\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

für $n = 1, 2, 3$ auf Stetigkeit, Differenzierbarkeit und stetige Differenzierbarkeit.

3. **Ableitungen auf Umwegen:** Bestimmen Sie zu

$$f(x) = x^3 \cosh\left(\frac{x^3}{6}\right)$$

die Werte der 8. und 9. Ableitung an der Stelle $x = 0$.

4. **Extremwertaufgabe:** In ein Gefäß (mit geraden Wänden), das vom Boden zur Höhe H mit Wasser gefüllt ist, wird in der Höhe h ein Loch gebohrt. Wie muss h gewählt werden, so dass der Auftreffpunkt des Wasserstrahls am Boden (der eben in gleicher Höhe wie der Gefäßboden liegt) möglichst weit vom Gefäß entfernt liegt? (Der Luftwiderstand soll vernachlässigt werden.)

5. **Stetigkeit im Mehrdimensionalen:** Untersuchen Sie die Funktionen f und g, $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$,

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2^3}{(x_1^2+x_2^2)^2} & \text{für } \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0} \\ 0 & \text{für } \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \end{cases}$$

$$g(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \frac{x_1^3 x_2^2}{(x_1^2+x_2^2)^2} & \text{für } \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0} \\ 0 & \text{für } \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \end{cases}$$

auf Stetigkeit im Ursprung.

6. **Partielle Ableitungen:** Man berechne alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung der folgenden Funktionen $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

$$f(x,y) = x^2\mathrm{e}^y + \mathrm{e}^{xy}$$
$$g(x,y) = \sin^2(xy)$$
$$h(x,y) = \mathrm{e}^{\cos x + y^3}$$

7. **Differenzierbarkeit im Mehrdimensionalen:** Man untersuche die Funktion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^6+y^5}{x^4+y^4} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

auf Stetigkeit. Des Weiteren berechne man die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ und die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial \widehat{\boldsymbol{a}}}(0,0)$ mit $\widehat{\boldsymbol{a}} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})^\top$. Ist die Funktion im Ursprung differenzierbar?

8. **Jacobi-Matrizen:** Gegeben sind die Abbildung $\boldsymbol{f}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} (1+x_1)(1+x_2) \\ \mathrm{e}^{x_3} + x_1 x_2 x_3 \end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{g}\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$,

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ y_1 y_2 \\ y_1^{y_2} \end{pmatrix},$$

und $\boldsymbol{h}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))$.

Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix von $\boldsymbol{f}$ in $\boldsymbol{x} = (0,0,0)^\top$, von $\boldsymbol{g}$ in $\boldsymbol{y} = (1,1)^\top$ und von $\boldsymbol{h}$ in $\boldsymbol{x} = (0,0,0)^\top$.

9. **Jacobi-Matrix und Polarkoordinaten:** Bestimmen Sie für die folgende Abbildung $\boldsymbol{f}$: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_0^+ \times (-\pi\,\pi]$,

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ \arctan \frac{x_2}{x_1} \end{pmatrix}$$

die Jacobi-Matrix. Transformieren Sie mit Hilfe der mehrdimensionalen Kettenregel den Differenzialausdruck

$$W = x\,\frac{\partial U}{\partial y} - y\,\frac{\partial U}{\partial x},$$

wobei U eine nicht näher festgelegte differenzierbare Funktion ist, auf Polarkoordinaten.