Lösungen durch Ansatz

(bei inhomogenen linearen Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten)

Gegeben: $u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + \ ... \ + a_1 u' + a_0 u = b(t)$

Die allgemeine Lösung der zugehörigen homogen Differentialgleichung ergibt sich durch Auswertung des charakteristischen Polynoms

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ ... \ + a_1\lambda + a_0 = 0 \ .$$

Sei nun $g(t)$ ein Summand der "Störfunktion" $b(t)$. In vielen Fällen ist der Funktionstyp eines Summanden des gesuchten speziellen Lösung derselbe wie jener von $g(t)$. Somit kann (Superpositionsprinzip!) ein allgemeiner Ansatz für die spezielle Lösung getroffen werden. Durch Einsetzen in die Differentialgleichung werden dann die allgemeinen Koeffizienten spezifiziert.

Damit man einen Ansatz in der anschließenden Weise durchführen kann, darf keine sogenannte **"äußere Resonanz"** vorliegen.

Definition. Ist $g(t)$ ein Summand von $b(t)$ und zugleich Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung, dann liegt für $g(t)$ äußere Resonanz vor.

Definition. Man spricht von **innerer Resonanz** , wenn eine Lösung λ des charakteristischen Polynoms mehrfach auftritt.

Beispiele für Ansätze:

g(t)	entsprechender Ansatz
A (const.)	B (const.)
$A_0 + A_1 t + ... + A_m t^m$	$B_0 + B_1 t + ... + B_m t^m$
t^m	$B_0 + B_1 t + ... + B_m t^m$
$Ae^{\mu t}$	$Be^{\mu t}$
$A\sin(kt)$	$C\sin(kt)+D\cos(kt)$
$A\cos(kt)$	$C\sin(kt)+D\cos(kt)$
$A\sin(kt)+B\cos(kt)$	$C\sin(kt)+D\cos(kt)$
$Ae^{\mu t}\sin(kt)$	$e^{\mu t}(C\cos(kt) + D\sin(kt))$
$Ae^{\mu t}\cos(kt)$	$e^{\mu t}(C\cos(kt) + D\sin(kt))$
$e^{\mu t}(A\cos(kt) + B\sin(kt))$	$e^{\mu t}(C\cos(kt) + D\sin(kt))$
$e^{\mu t}P(t)$	$e^{\mu t}Q(t)$
$P(t)\sin(kt)$	$Q(t)\sin(kt) + R(t)\cos(kt)$
$P(t)\cos(kt)$	$Q(t)\sin(kt) + R(t)\cos(kt)$

Bei äußerer Resonanz und keiner innerer Resonanz:

Multipliziere den Ansatz für $g(t)$ mit einem linearen Polynom in t.

Bei äußerer Resonanz und innerer Resonanz:

Multipliziere den Ansatz für $g(t)$ mit einem Polynom in t vom Grad des jeweiligen λ.