Homöomorphismen und Einbettungen

Homöomorphismen sind die Isomorphismen in der Kategorie der topologischen Räume und stetigen Abbildungen.

Definition. 1) Eine Abbildung $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ heißt **Homöomorphismus** zwischen (X, τ) und (Y, σ), wenn f bijektiv, stetig und die Umkehrabbildung f^{-1} stetig ist.

2) Zwei Räume (X, τ) und (Y, σ) heissen **homöomorph** wenn zwischen ihnen ein Homöomorphismus existiert.

Offenbar ist die Homöomorphie eine Äquivalenzrelation auf der Klasse aller topologischen Räume.

Homöomorphe Räume (X, τ) und (Y, σ) sind bezüglich ihrer topologischen Struktur **nicht** voneinander unterscheidbar, weil ein Homöomorphismus $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ nicht nur eine Bijektion zwischen den Mengen X und Y herstellt sondern auch mittels $O \mapsto f(O)$ eine Bijektion zwischen τ und σ .

Damit sind alle Eigenschaften, welche auf mengentheoretische Begriffe und den Begriff der offenen Menge zurückgeführt werden können, genau dann in dem einen Raum erfüllt, wenn sie auch im anderen Raum erfüllt sind. Solche Eigenschaften heissen auch **topologische Eigenschaften** (wie z.B. "kompakt").

Beispiel. Ein offenes Intervall $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ ist homöomorph zu ganz $\mathbb{R}$ und damit sind je zwei offene Intervalle in $\mathbb{R}$ zueinander homöomorph.

Eine zentrale Aufgabe der Topologie ist es zu entscheiden, ob zwei gegebene Räume homöomorph sind oder nicht.

Es gilt: Ist $f : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ eine bijektive stetige Abbildung, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1) f ist ein Homöomorphismus,
2) f ist eine offene Abbildung,
3) f ist eine abgeschlossene Abbildung.

Definition. Eine Abbildung $f : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ heißt **Einbettung**, wenn f einen Homöomorphismus zwischen (X,τ) und dem Teilraum $(f(X), \sigma|_{f(X)})$ liefert.

In anderen Worten: $f : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ ist genau dann eine Einbettung, wenn f injektiv und stetig ist und für jede offene Menge $O \in \tau$ gilt, daß $f(O)$ eine offene Menge bzgl. des Teilraums $f(X)$ ist.

Beispiel. Offenbar kann $\mathbb{R}$ mittels der Abbildung $x \mapsto (x,0)$ in den $\mathbb{R}^2$ eingebettet werden.
(D.h. die x-Achse im $\mathbb{R}^2$ ist topologisch "nichts anderes" als der Raum $\mathbb{R}$)