Tutorium 20.03.2020

Thema sind **Kegelschnitte** bzw. **Kurven 2. Ordnung**. Für die Behandlung der entsprechenden Beispiele gibt es eine systematische Vorgehensweise, die Sie in der Vorlesung kennengelernt haben bzw. die Sie von meiner Homepage
(www.math.tugraz.at/∼ganster/tutorium_mathematik_II_ss_2020.html)
herunterladen können.

1. **Beispiel 12d)**

   $5x_1^2 + 26x_1x_2 + 5x_2^2 + 62x_1 + 46x_2 + 9 = 0$

   In der Matrixschreibweise erhalten wir

   $$A = \begin{pmatrix} 5 & 13 \\ 13 & 5 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{p} = \begin{pmatrix} 62 \\ 46 \end{pmatrix} \quad , \quad f = 9$$

   Wegen $\det A = -144 \neq 0$, kommt Fall 1 zum Tragen, d.h. es wird zuerst eine Parallelverschiebung (des Koordinatensystems) durchgeführt.

   Mit $A^{-1} = \frac{1}{-144} \begin{pmatrix} 5 & -13 \\ -13 & 5 \end{pmatrix}$ ist

   $$\vec{q} = -\tfrac{1}{2}A^{-1}\vec{p} = \tfrac{1}{288} \begin{pmatrix} 5 & -13 \\ -13 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 62 \\ 46 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

   sowie $f^* = f + \frac{1}{2}\vec{p}^T\vec{q} = 9 + \frac{1}{2}(62 \ \ 46) \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = -68$

   Im verschobenen Koordinatensystem erhalten wir damit die Gleichung $5y_1^2 + 26y_1y_2 + 5y_2^2 - 68 = 0$.

   Nun wird das gemischtquadratische Glied durch eine Drehung des Koordinatensystems eliminiert. Dazu benötigen wir die Eigenwerte von A .

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 13 \\ 13 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)^2 - 169 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = 18\;,\; \lambda_2 = -8$$

(Wir einigen uns hier auf eine Numerierung der Eigenwerte mittels $\lambda_1 = 18$ und $\lambda_2 = -8$. Genau so legitim wäre die Numerierung $\lambda_1 = -8$ und $\lambda_2 = 18$.)

Die 1. Spalte der gesuchten Drehmatrix B besteht aus einem normierten (!) Eigenvektor zu λ_1 , die zweite Spalte aus einem normierten Eigenvektor zu λ_2 . Dieser ist so zu orientieren, dass $\det B = +1$ ist.

Ein Eigenvektor zu $\lambda_1 = 18$ wird auf die gewohnte Weise durch Lösung eines homogenen Gleichungssystems bestimmt.

$$\begin{pmatrix} -13 & 13 \\ 13 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad u = v \quad \text{z.B.} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dieser normiert liefert $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Für $\lambda_2 = -8$ erhalten wir analog (und bereits richtig orientiert) $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Bemerkung. Aus Kenntnis der Eigenwerte können wir bereits die Normalform durch $\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + f^* = 0$ angeben, hier also $18z_1^2 - 8z_2^2 = 68$, was eine Hyperbel ist.

Die Drehmatrix ist also $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. Mit $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ erhalten wir $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

2. **Beispiel 13e)**

$$x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 - 10x_1 - 6x_2 + 25 = 0$$

Hier ist $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{p} = \begin{pmatrix} -10 \\ -6 \end{pmatrix}$, $f = 25$

Weil $\det A = 0$, kommt Fall 2 zum Tragen, d.h. es wird zuerst (!) eine Drehung durchgeführt. Außerdem ist notwendigerweise ein Eigenwert dabei gleich Null.

Die Bestimmung der Eigenwerte liefert $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 0$.

Die zugehörigen (und bereits richtig orientierten) normierten Eigenvektoren sind $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Folglich ist die Drehmatrix $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. Mit $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $\sin\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ergibt sich als Drehwinkel $\varphi = -\frac{\pi}{4}$.

Mit $(\overline{d}, \overline{e}) = \vec{p}^T B = (-10 \quad -6)\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = (-2\sqrt{2} \quad -8\sqrt{2})$ erhalten wir

$2y_1^2 - 2\sqrt{2}y_1 - 8\sqrt{2}y_2 + 25 = 0$.

Nach geeigneter quadratischer Ergänzung erfolgt abschließend eine Parallelverschiebung.

$y_1^2 - \sqrt{2}y_1 - 4\sqrt{2}y_2 + \frac{25}{2} = 0$ bzw. $(y_1^2 - \sqrt{2}y_1 + \frac{1}{2}) - \frac{1}{2} - 4\sqrt{2}y_2 + \frac{25}{2} = 0$

liefert $(y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}})^2 - 4\sqrt{2}y_2 + 12 = 0$.

Mit der Setzung $z_1 = y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $z_2 = y_2$ erhalten wir

$z_1^2 = 4\sqrt{2}z_2 - 12$, was eine Parabel ist.

3. **Beispiel 13d)**

$x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 - 2x_1 + 2x_2 = 0$

Hier ist $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{p} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $f = 0$

Wie zuvor ist $\det A = 0$ und $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 0$.

Die Drehmatrix ist wieder $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

Für $\vec{p}^T B$ ergibt sich hier $\vec{p}^T B = (-2\sqrt{2} \quad 0)$, folglich

$2y_1^2 - 2\sqrt{2}y_1 = 0$ bzw. $2y_1(y_1 - \sqrt{2}) = 0$.

Dies sind im gedrehten Koordinatensystem die beiden Geraden $y_1 = 0$ und $y_1 = \sqrt{2}$.