Tutorium 27.03.2020

Heutiges Thema sind gewisse Typen von **gewöhnlichen Differentialgleichungen**. Generell ist zu sagen, dass es bei Differentialgleichungen von großer Bedeutung ist, den jeweiligen Typ zu erkennen, weil es dann oft entsprechende Lösungsmethoden gibt.

Ein derartiger Typ ist etwa eine **Differentialgleichung mit getrennten Variablen**. Diese hat die Form

$$y' = f(x)g(y)$$

Wir erhalten konstante Lösungen $y = y_0$ falls $g(y_0) = 0$.

Ansonsten betrachten wir die Umformung

$$\tfrac{dy}{dx} = f(x)g(y) \;\Rightarrow\; \tfrac{dy}{g(y)} = f(x)dx \Rightarrow \int \tfrac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$$

woraus wir eine implizite Darstellung der Lösungskurven erhalten.

Beispiel. $y' = xy$

Die konstante Funktion $y = 0$ ist Lösung. Für $y \neq 0$ erhalten wir

$$\int \tfrac{dy}{y} = \int x dx \;\Rightarrow\; \ln|y| = \tfrac{x^2}{2} + C \;\Rightarrow\; y = \pm e^{\frac{x^2}{2}} e^C \;\Rightarrow\; y = Ke^{\frac{x^2}{2}}$$

Die **lineare Differentialgleichung 1. Ordnung** hat die Form

$$y' + f(x)y = g(x) \quad \text{(inhomogene Differentialgleichung)}$$

Die zugehörige homogene Differentialgleichung $y' + f(x)y = 0$ hat die allgemeine Lösung

$$y_H = Ke^{-\int f(x)dx} \;,\; K \in \mathbb{R}$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung setzt sich zusammen aus der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung und **einer** speziellen (oder partikulären) Lösung der inhomogenen Gleichung. Diese kann mittels Variation der Konstanten oder per Ansatz gefunden werden.

1. **Beispiel 18c)**

   $y' - \frac{4}{x+2}y = (x+2)^5$

   Dies ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung mit $f(x) = -\frac{4}{x+2}$ und $g(x) = (x+2)^5$.

   $y_H = Ke^{\int \frac{4}{x+2}dx} = Ke^{4\ln(x+2)} = Ke^{\ln(x+2)^4} = K(x+2)^4$

   Bei der Variation der Konstanten verwenden wir den Ansatz $y_I = K(x)(x+2)^4$ und setzen diesen in die inhomogene Gleichung ein.

   $K'(x+2)^4 + 4K(x+2)^3 - \frac{4}{x+2}K(x+2)^4 = (x+2)^5$

   Es verbleibt $K'(x+2)^4 = (x+2)^5$ bzw. $K' = x+2 \Rightarrow K = \frac{x^2}{2} + 2x$

   Damit ist $y_I = (\frac{x^2}{2} + 2x)(x+2)^4$ und die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet

   $y = K(x+2)^4 + (\frac{x^2}{2} + 2x)(x+2)^4 \ , \ K \in \mathbb{R}$

2. **Bemerkung.**

   Bei linearen Differentialgleichungen höherer Ordnung mit **konstanten** Koeffizienten wird wiederum zuerst die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung bestimmt (mittels des Exponentialansatzes $y = e^{\lambda x}$).

   Danach bestimmt man eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung mittels Erraten, Ansatz oder Variation der Konstanten.

   Details siehe Vorlesung.

3. **Beispiel 19b)**

   $2y'' + 2y' + 3y = 0$ bzw. $y'' + y' + \frac{3}{2}y = 0$

Dies ist eine homogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Der Exponentialansatz $y = e^{\lambda x}$ liefert die **charakteristische Gleichung** $\lambda^2 + \lambda + \frac{3}{2} = 0$.

Die Nullstellen sind $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Gemäss der Diskussion in der Vorlesung bilden dann die Funktionen

$e^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{5}}{2}x$ und $e^{-\frac{x}{2}} \sin \frac{\sqrt{5}}{2}x$ ein sogenanntes Fundamentalsystem.

Die allgemeine Lösung ist daher

$$y = C_1 e^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{5}}{2}x + C_2 e^{-\frac{x}{2}} \sin \frac{\sqrt{5}}{2}x \quad , \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

4. **Beispiel 19h)**

$$y'' - 3y' + 2y = 14 \sin 2x - 18 \cos 2x$$

Wir bestimmen zuerst die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung. Die charakteristische Gleichung ist

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_{1,2} = \tfrac{3}{2} \pm \tfrac{1}{2} \;\Rightarrow\; \lambda_1 = 2 \;,\; \lambda_2 = 1$$

Die Funktionen $y_1 = e^{2x}$ und $y_2 = e^x$ bilden ein Fundamentalsystem, folglich ist

$y_H = C_1 e^{2x} + C_2 e^x$ die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung.

Um eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung zu bestimmen, treffen wir den Ansatz

$$y_I = A \sin 2x + B \cos 2x$$

und setzen diesen in die inhomogene Gleichung ein.

$$y_I' = 2A \cos 2x - 2B \sin 2x \quad , \quad y_I'' = -4A \sin 2x - 4B \cos 2x$$

$-4A\sin 2x - 4B\cos 2x - 3(2A\cos 2x - 2B\sin 2x) + 2(A\sin 2x + B\cos 2x) = 14\sin 2x - 18\cos 2x$

$(-2A + 6B)\sin 2x + (-6A - 2B)\cos 2x = 14\sin 2x - 18\cos 2x$

Koeffizientenvergleich liefert $-2A + 6B = 14$, $-6A - 2B = -18$

Damit ist $A = 2$, $B = 3$ und $y_I = 2\sin 2x + 3\cos 2x$

Die allgemeine Lösung ist $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^x + 2\sin 2x + 3\cos 2x$.

5. **Bemerkung.)**

Für die Differentialgleichung $y'' - 2y' + y = 0$ erhalten wir die charakteristische Gleichung $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ und folglich $\lambda_{1,2} = 1$.

Wenn eine Nullstelle mehrfach auftritt, sprechen wir von **innerer Resonanz** . In obigem Fall erhalten wir für die doppelte Nullstelle $+1$ die zugehörigen Funktionen e^x, xe^x als Fundamentalsystem.

Die allgemeine Lösung ist also $y = C_1 e^x + C_2 xe^x$.

Betrachten wir nun die Gleichung $y'' - 3y' + 2y = e^x + \sin x$. Von vorher wissen wir, dass die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung durch $y_H = C_1 e^{2x} + C_2 e^x$ gegeben ist.

Der Summand e^x der rechten Seite ist allerdings eine Lösung der homogenen Gleichung. Dieses Phänomen heißt **äußere Resonanz**.

In diesem Fall muss der übliche Ansatz für den Summanden e^x , der Ae^x wäre, modifiziert werden zu Axe^x !

Für den zweiten Summanden $\sin x$ liegt keine äußere Resonanz vor, deshalb ist der korrekte Ansatz zur Bestimmung einer speziellen Lösung

$y_I = Axe^x + B\cos x + C\sin x$.

Im Falle der Gleichung $y'' - 2y' + y = e^x + \sin x$ ergibt sich für e^x sowohl innere als auch äußere Resonanz!

In diesem Fall muss der übliche Ansatz mit x^2 multipliziert werden, also

$$y_I = Ax^2e^x + B\cos x + C\sin x \ .$$

6. **Beispiel 19n)**

   $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$. Die rechte Seite ist $g(x) = \frac{1}{\cos x}$

   Die charakteristische Gleichung ist $\lambda^2 + 1 = 0 \ \Rightarrow \ \lambda = \pm i$.

   Die Funktionen $y_1(x) = \cos x$ und $y_2(x) = \sin x$ bilden ein Fundamentalsystem, folglich $y_H = C_1\cos x + C_2\sin x$.

   Für die rechte Seite steht kein "üblicher" Ansatz zur Verfügung, deshalb bestimmen wir eine spezielle Lösung mittels Variation der Konstanten.

   Dabei ist $y_I = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$, wobei

   $$C_1(x) = -\int \frac{y_2 \cdot g}{\Delta}dx \quad , \quad C_2(x) = +\int \frac{y_1 \cdot g}{\Delta}dx \quad , \quad \Delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

   $$\Delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1$$

   $$C_1(x) = -\int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \tan x dx = \ln|\cos x|$$

   $$C_2(x) = \int \frac{\cos x}{\cos x}dx = x$$

   Damit ist $y_I = \ln|\cos x| \cdot \cos x + x\sin x$ und

   $$y = C_1\cos x + C_2\sin x + \ln|\cos x| \cdot \cos x + x\sin x \quad , \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$