Tutorium 24.04.2020

1. **Beispiel 32 a)**

   Man bestimme die Bogenlänge des Kurvenbogens
   $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos t \\ e^t \sin t \end{pmatrix}, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

   Die allgemeine Formel für die Bogenlänge einer ebenen Kurve in Parameterdarstellung lautet

   $$s = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$$

   Hier ist $x(t) = e^t \cos t$, $y(t) = e^t \sin t$ und folglich

   $\dot{x} = e^t \cos t - e^t \sin t$, $\dot{y} = e^t \sin t + e^t \cos t$.

   $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = e^{2t}(\cos^2 t - 2\cos t \sin t + \sin^2 t) + e^{2t}(\sin^2 t + 2\cos t \sin t + \cos^2 t) = 2e^{2t}$

   $\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{2}e^t$

   $$s = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2}e^t dt = \sqrt{2}e^t \,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2}(e^{\frac{\pi}{2}} - 1)$$

2. **Bemerkung**

   Liegt eine ebene Kurve in der Form $y = f(x)$, $x_0 \leq x \leq x_1$ vor, dann lautet die Formel für die Bogenlänge

   $$s = \int\limits_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx$$

3. **Beispiel 33 c)**

Man bestimme die Bogenlänge von $r = 1 - \cos\varphi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

Hier lautet die allgemeine Formel $s = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi$.

Mit $r' = \sin\varphi$ erhalten wir

$r^2 + r'^2 = 1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 2(1 - \cos\varphi)$

Wir verwenden nun die Formel $1 - \cos\varphi = 2\sin^2\frac{\varphi}{2}$, folglich

$\sqrt{r^2 + r'^2} = \sqrt{2}\sqrt{2\sin^2\frac{\varphi}{2}} = 2|\sin\frac{\varphi}{2}|$

Für $0 \le \varphi \le 2\pi$ ist $0 \le \frac{\varphi}{2} \le \pi$, folglich $\sin\frac{\varphi}{2} \ge 0$.

Also $s = \int\limits_0^{2\pi} 2\sin\frac{\varphi}{2} d\varphi = -4\cos\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{2\pi} = -4(-1-1) = 8$

4. **Beispiel 48 e)**

Man berechne die Bogenlänge der Raumkurve $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3\sqrt{2}}\cos t \\ \frac{1}{3}\sin t \\ \frac{1}{3\sqrt{2}}\cos t \end{pmatrix}$

, wobei $0 \le t \le \pi$.

Die allgemeine Formel lautet hier $s = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt$.

$\dot{x} = -\frac{1}{3\sqrt{2}}\sin t$, $\dot{y} = \frac{1}{3}\cos t$, $\dot{z} = -\frac{1}{3\sqrt{2}}\sin t$

$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \frac{1}{18}\sin^2 t + \frac{1}{9}\cos^2 t + \frac{1}{18}\sin^2 t = \frac{1}{9}$

Also $s = \int\limits_0^{\pi} \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3}t\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{3}$

5. **Beispiel 51 a)**

Man bestimme das begleitende Dreibein für die Raumkurve

$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1+\sinh t \\ 1-\cosh t \\ e^{2t} \end{pmatrix}$ im Punkt $P(1,0,1)$.

Wir haben die Vektoren $\vec{t} = \frac{\dot{\vec{x}}}{|\dot{\vec{x}}|}$, $\vec{b} = \frac{\dot{\vec{x}}\times\ddot{\vec{x}}}{|\dot{\vec{x}}\times\ddot{\vec{x}}|}$, $\vec{n} = \vec{b}\times\vec{t}$ zu bestimmen (ausgewertet im Punkt P).

Dem Punkt P entspricht offenbar der Parameterwert $t = 0$.

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} \cosh t \\ -\sinh t \\ 2e^{2t} \end{pmatrix} \quad , \quad \dot{\vec{x}}|_P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\ddot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} \sinh t \\ -\cosh t \\ 4e^{2t} \end{pmatrix} \quad , \quad \ddot{\vec{x}}|_P = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$(\dot{\vec{x}}\times\ddot{\vec{x}})|_P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Folglich $\vec{t} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \frac{1}{\sqrt{21}}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$ und

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{105}}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{105}}\begin{pmatrix} -8 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$