Tutorium 05.06.2020

In diesem Teil diskutieren wir verschiedene Lösungsmethoden für gewöhnliche Differentialgleichungen.

1. **Beispiel 102 b).**

   Eine **Bernoulli** Differentialgleichung hat die Form

   $y' + f(x)y + g(x)y^{\alpha} = 0 \quad , \quad \alpha \neq 0, 1$

   Durch die Substitution $z = y^{1-\alpha}$ erhalten wir eine lineare Differentialgleichung $z' + (1-\alpha)f(x) = (\alpha - 1)g(x)$, die wir lösen können.

   Gegeben sei $y' + \frac{1}{x}y + xy^2 = 0$.

   Das ist eine Bernoulli Differentialgleichung mit $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x$, $\alpha = 2$.

   Die Substitution $z = y^{-1}$ liefert $z' - \frac{1}{x}z = x$.

   Die homogene Dgl. ist $z' - \frac{1}{x}z = 0$ bzw. $z_H = Cx$.

   Der Ansatz für z_I ist $z_I = C(x)x$.

   Eingesetzt ergibt sich $C'x + C - \frac{1}{x}Cx = x \quad \Rightarrow \quad C' = 1 \quad \Rightarrow \quad C = x$

   Also ist $z_I = x^2$ und $z = Cx + x^2$.

   Rücksubstitution liefert $y = \frac{1}{z} = \frac{1}{Cx+x^2}$, $C \in \mathbb{R}$.

2. **Beispiel 103 b)**

   Eine **Riccati** Differentialgleichung hat die Form

   $y' + f(x)y + g(x)y^2 = h(x)$.

Ist nun eine partikuläre Lösung y_p bekannt, dann erhält man durch die Substitution $y = z + y_p$ eine Bernoulli Differentialgleichung für $z(x)$, welche gemäss vorher gelöst werden kann.

Sei nun $y' - \frac{1}{x}y + \frac{x-1}{2x^2}y^2 = \frac{x-1}{2}$ und $y_p = x$.

Die Substitution $y = z + x$ liefert

$z' + 1 - \frac{1}{x}(z + x) + \frac{x-1}{2x^2}(x^2 + 2xz + x^2) = \frac{x-1}{2}$

Durch Zusammenfassen erhalten wir die Bernoulli Dgl

$z' + (1 - \frac{2}{x})z + \frac{x-1}{2x^2}z^2 = 0$

Hier ist $f(x) = 1 - \frac{2}{x}$, $g(x) = \frac{x-1}{2x^2}$, $\alpha = 2$.

Mit der Substitution $v = z^{-1}$ erhalten wir die lineare Dgl

$v' - (1 - \frac{2}{x})v = \frac{x-1}{2x^2}$.

Es folgt $v_H = Ce^x x^{-2}$.

Mit dem Ansatz $v_I = C(x)e^x x^{-2}$ folgt dann

$C'e^x x^{-2} + Ce^x x^{-2} - 2Ce^x x^{-3} - (1 - \frac{2}{x})Ce^x x^{-2} = \frac{x-1}{2x^2}$

$\Rightarrow \quad C' = \frac{x-1}{2}e^{-x} = \frac{1}{2}(xe^{-x} - e^{-x}) \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{x}{2}e^{-x}$

Folglich $v_I = -\frac{x}{2}e^{-x}e^x x^{-2} = -\frac{1}{2x}$.

Wir erhalten $v = Ce^x x^{-2} - \frac{1}{2x} = \frac{2Ce^x - x}{2x^2}$.

Wegen $z = \frac{1}{v}$ gilt $z = \frac{2x^2}{2Ce^x - x}$ und $y = \frac{2x^2}{2Ce^x - x} + x$.

3. **Beispiel 104 c)**

Eine Differentialgleichung $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ heißt **exakt** wenn eine Funktion $F(x,y)$ existiert mit $F_x = P$ und $F_y = Q$.

$F(x,y)$ heißt **Stammfunktion** und existiert, wenn die Integrabilitätsbedingung $P_y = Q_x$ erfüllt ist.

Die allgemeine Lösung der Dgl ist dann $F(x,y) = C \quad , \; C \in \mathbb{R}$.

Sei nun $\frac{1}{y} \sin \frac{x}{y} dx - \frac{x}{y^2} \sin \frac{x}{y} dy = 0$.

Dann ist $P = \frac{1}{y} \sin \frac{x}{y} \quad , \quad Q = -\frac{x}{y^2} \sin \frac{x}{y}$.

$P_y = -\frac{1}{y^2} \sin \frac{x}{y} + \frac{1}{y} \cos \frac{x}{y} \cdot -\frac{x}{y^2} \quad , \quad Q_x = -\frac{1}{y^2} \sin \frac{x}{y} - \frac{x}{y^2} \cos \frac{x}{y} \cdot \frac{1}{y}$

Wir beobachten, dass $P_y = Q_x$, also ist die Dgl exakt und es existiert eine Funktion $F(x,y)$ mit $F_x = P$ und $F_y = Q$.

Wie kann nun $F(x,y)$ bestimmt werden?

Wegen $F_x = P$ ist $F_x = \frac{1}{y} \sin \frac{x}{y}$. Integration nach x liefert

$F = -\cos \frac{x}{y} + \varphi(y)$.

Hier tritt statt der Integrationskonstanten eine willkürliche Funktion $\varphi(y)$ auf, die noch zu bestimmen ist. Wir sehen hier, dass tatsächlich $F_x = P$ gilt.

Wegen der weiteren Bedingung $F_y = Q$ erhalten wir

$\sin \frac{x}{y} \cdot -\frac{x}{y^2} + \varphi'(y) = -\frac{x}{y^2} \sin \frac{x}{y} \quad \Rightarrow \quad \varphi' = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = 0$

Damit ist $F(x,y) = -\cos \frac{x}{y}$ und die allgemeine Lösung der Dgl lautet damit

$-\cos \frac{x}{y} = C \quad \text{bzw.} \quad \cos \frac{x}{y} = C^* \quad , \; C^* \in \mathbb{R}$.

Bemerkung. Manchmal ist es günstiger, mit der Gleichung $F_y = Q$ zu starten und diese nach y zu integrieren. Wir erhalten dann statt einer Integrationskonstanten eine willkürliche Funktion $\psi(x)$. Durch Auswerten der zweiten Bedingung $F_x = P$ wird dann $\psi(x)$ bestimmt.

4. **Beispiel 105 c)**

Ist eine Dgl $Pdx + Qdy = 0$ nicht exakt, dann kann sie unter Umständen durch Multiplikation mit einer Funktion $m(x,y)$ exakt gemacht werden, d.h. die Dgl $(mP)dx + (mQ)dy = 0$ ist eine exakte Dgl und kann gemäss vorher gelöst werden. Die Lösung dieser Dgl stimmt mit der Lösung der ursprünglichen Dgl überein.

Die Funktion $m(x,y)$ heißt **Euler'scher Multiplikator** oder **integrierender Faktor**.

Es gilt: Ist $\frac{P_y - Q_x}{Q}$ **nur** eine Funktion von x , dann ist

$m(x) = e^{\int \frac{P_y - Q_x}{Q} dx}$ ein integrierender Faktor.

Ist $\frac{Q_x - P_y}{P}$ **nur** eine Funktion von y , dann ist

$m(y) = e^{\int \frac{Q_x - P_y}{P} dy}$ ein integrierender Faktor.

Sei $(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3})dx + (x^2 + y^2)dy = 0$ gegeben.

$P = 2xy + x^2y + \frac{y^3}{3} \quad \Rightarrow \quad P_y = 2x + x^2 + y^2$

$Q = x^2 + y^2 \quad \Rightarrow \quad Q_x = 2x$

Die Dgl ist also **nicht** exakt.

$\frac{P_y - Q_x}{Q} = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1$ ist nur eine Funktion von x .

Also ist $m = e^{\int 1 dx} = e^x$ ein integrierender Faktor und die Dgl

$(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3})e^x dx + (x^2 + y^2)e^x dy = 0$ ist exakt!

Mit $\widetilde{P} = (2xy + x^2y + \frac{y^3}{3})e^x$ und $\widetilde{Q} = (x^2 + y^2)e^x$ gilt tatsächlich $\widetilde{P}_y = \widetilde{Q}_x$.

Mit $F_y = \widetilde{Q} = (x^2 + y^2)e^x$ folgt $F(x,y) = x^2e^xy + \frac{y^3}{3}e^x + \psi(x)$.

Mit $F_x = \widetilde{P}$ folgt

$2xe^xy + x^2e^xy + \frac{y^3}{3}e^x + \psi' = (2xy + x^2y + \frac{y^3}{3})e^x$ und weiters

$\psi' = 0 \Rightarrow \psi = 0$.

Also ist $F(x,y) = x^2e^xy + \frac{y^3}{3}e^x = C$, $C \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung.

5. **Beispiel 106 b)**

Manche Differentialgleichungen können durch geeignete Substitutionen vereinfacht und dann gelöst werden.

Sei $x^2y' + xy = x^2 + y^2$, $x > 0$ gegeben.

Division durch x^2 ergibt $y' + \frac{y}{x} = 1 + \frac{y^2}{x^2}$.

Wir betrachten nun die Substitution $z(x) = \frac{y(x)}{x}$.

Dann ist $y = xz$ und $y' = z + xz'$.

Eingesetzt ergibt sich $z + xz' + z = 1 + z^2$ bzw.

$xz' = z^2 - 2z + 1 = (z-1)^2$.

Dies ist eine Dgl mit getrennten Variablen.

Aus $\frac{dz}{(z-1)^2} = \frac{dx}{x}$ folgt $-\frac{1}{z-1} = \ln x + C$ bzw.

$-\frac{1}{\frac{y}{x}-1} = \ln x + C \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{x-y} = \ln x + C \;,\; C \in \mathbb{R}$

6. **Beispiel 111 c)**

Eine sogenannte **Euler'sche Dgl** hat die Form

$y^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1xy' + a_0y = f(x) \quad , \; a_i \in \mathbb{R}$

Diese Dgl kann durch die Substitution

$|x| = e^t \;,\; t = \ln|x| \;,\; y(x) = v(t)$

in eine lineare Dgl mit konstanten Koeffizienten übergeführt werden.

Dabei gilt $xy' = \dot{v}$, $x^2y'' = \ddot{v} - \dot{v}$, $x^3y''' = \dddot{v} - 3\ddot{v} + 2\dot{v}$

Sei $x^2y'' - 2y = \sin(\ln x)$, $x > 0$ gegeben.

Wir erhalten $\ddot{v} - \dot{v} - 2v = \sin t$.

Mit $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ ist $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$.

Also $v_H = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t}$.

Der Ansatz $v_I = A\cos t + B\sin t$ liefert $A = \frac{1}{10}$, $B = -\frac{3}{10}$, also

$v = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t} + \frac{1}{10}\cos t - \frac{3}{10}\sin t$.

Wegen $t = \ln x$ (beachte $x > 0$) und $e^{2t} = x^2$, $e^{-t} = \frac{1}{x}$ erhalten wir somit

$y = C_1 x^2 + C_2 \frac{1}{x} + \frac{1}{10}\cos(\ln x) - \frac{3}{10}\sin(\ln x)$