Analysis T2,
1. Test, 12. 5. 2005

1. **[5 Punkte]** Gegeben sei die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & \text{für } (x,\, y) \neq (0,\, 0) \\ 0 & \text{für } x = y = 0 \end{cases}$$

auf $D(f) = \mathbb{R}^2$.

(a) Untersuchen Sie diese Funktion im Punkt (0, 0) auf Stetigkeit.

(b) Bestimmen Sie die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}\big|_{(0,\,0)}$ in die allgemeine Richtung $\vec{a} = (a_1,\, a_2)$ mit $\|\vec{a}\|^2 = a_1^2 + a_2^2 = 1$.

(c) Untersuchen Sie f im Punkt (0, 0) auf Differenzierbarkeit.

2. **[5 Punkte]** Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$f(x,\, y) = e^{xy} + \cos x + \sin y - 2 = 0$$

in einer Umgebung von $(0,\, \pi)$ nach y auflösbar ist und bestimmen Sie für diese Auflösung die erste Ableitung $y'(0)$.

3. **[5 Punkte]** Bestimmen Sie mittels Verfahren der Lagrange-Multiplikatoren jene Punkte auf der Kurve

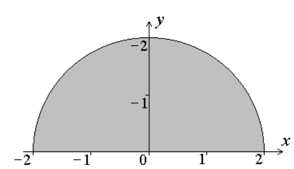
$$9x^2 + 16y^2 = 144$$

die vom Ursprung (0, 0) den minimalen Abstand haben.

4. **[5 Punkte]** Bestimmen Sie das Integral

$$I = \iint_B (x^2 y + x y^2)\, dx\, dy,$$

wobei B der obere Halbkreis mit Mittelpunkt (0, 0) und Radius $r = 2$ ist.



Alle Rechenschritte sind anzugeben, alle Ergebnisse sind zu begründen!