Anhang A

Literatur und Lösungen

D*ieser Anhang*

A.1 Literatur

A.2 Lösungen: Kapitel Acht

A.2.1 Lösungen der Übungsaufgaben

1. (a) Für $xy \neq 0$ ist $f_x(x,y) = 2xy \sin \frac{1}{xy} - \cos \frac{1}{xy}$ und $f_y(x,y) = x^2 \sin \frac{1}{xy} - \frac{x}{y} \cos \frac{1}{xy}$. Daher ist

$$\operatorname{grad} f\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\right) = \left(\frac{4}{\pi} \sin \frac{\pi}{2} - \cos \frac{\pi}{2}, \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi}{2} - \cos \frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{4}{\pi}, \frac{2}{\pi}\right).$$

Für $y = 0$ gilt $f_x(x,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,0)-f(x,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0-0}{h} = 0 \ \forall x$; für $x = 0$ analog $f_y(0,y) = 0 \ \forall y$. Also ist $\operatorname{grad} f(0,0) = (0,0)$.

(b) $\lim_{x \to 0} f(x,0) = \lim_{x \to 0} 0 = 0$, $\lim_{y \to 0} f(0,y) = \lim_{y \to 0} 0 = 0$ und

$$\lim_{x \to 0} f(x,kx) = \lim_{x \to 0} kx^3 \sin \tfrac{1}{kx^2} = 0$$

weil $|\sin \frac{1}{kx^2}| \leq 1$ und $x^3 \to 0$ für $x \to 0$.

(c) $\lim_{x \to 0} f_x(x,1) = \lim_{x \to 0} (2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}) = -\lim_{x \to 0} \cos \frac{1}{x}$ existiert nicht. Dagegen ist ist

$$f_x(0,1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,1) - f(0,1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} h \sin \tfrac{1}{h} = 0$$

2. Man erhält für die partiellen Ableitungen:

$$\begin{array}{lll} f_x = 3x^2 - 3 & f_{xx} = 6x & f_{xy} = 0 \\ f_y = 3y^2 - 12 & f_{yx} = 0 & f_{yy} = 6y \end{array}$$

Aus $f_x(x,y) = 3x^2 - 3 = 0$ erhält man $x^2 = 1$, also $x = \pm 1$; aus $f_y(x,y) = 3y^2 - 12 = 0$ analog $y^2 = 4$, also $y = \pm 2$. Es gibt also vier kritische Punkte

$$P_1(1,2) \qquad P_2(1,-2) \qquad P_3(-1,2) \qquad P_4(-1,-2)$$

Die Determinante der Hesse-Matrix ist $\Delta_2 = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = 36xy$; für die Punkte:

$$\begin{array}{ll} \Delta_2|_{P_1} = 72 > 0 & f_{xx}|_{P_1} = 6 > 0 \to \text{relatives Minimum} \\ \Delta_2|_{P_2} = -72 < 0 & \text{Sattelpunkt} \\ \Delta_2|_{P_3} = -72 < 0 & \text{Sattelpunkt} \\ \Delta_2|_{P_4} = 72 > 0 & f_{xx}|_{P_1} = -6 < 0 \to \text{relatives Maximum} \end{array}$$

Die gefundenen Extrema können nur lokal sein, da $f(x,0) = x^3 - 3x + 20 \to +\infty$ für $x \to +\infty$ und $f(x,0) \to -\infty$ für $x \to -\infty$.

3. Es gilt $f_1, \ f_2 \in C^1$ und $f_1(0,1,0) = f_2(0,1,0) = 0$. Für die Jacobi-Determinante erhält man

$$\left|\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(y,z)}\right| = \left|\begin{array}{cc} 4(y+z)^3 + x(x^2 - z^2) & 4(y+z)^3 - 2xyz \\ -z(x^2+y^2) & 4(z-x)^3 - y(x^2+y^2) \end{array}\right|_P = \left|\begin{array}{cc} 4 & 4 \\ 0 & -1 \end{array}\right| = -4 \neq 0,$$

also existiert eine derartige Auflösung. Zu den Ableitungen:

$$\begin{array}{rcl} F_1(x) & = & (y(x)+z(x))^4 + xy(x)(x^2 - z(x)^2) - 1 \equiv 0 \\ F_2(x) & = & (z(x)-x)^4 - y(x)z(x)(x^2 + y(x)^2) \equiv 0 \\ F_1'(x) & = & 4(y(x)+z(x))^3 \cdot (y'(x) + z'(x)) + y(x) \cdot (x^2 - z(x)^2) \\ & & +xy'(x) \cdot (x^2 - z(x)^2) + xy(x) \cdot (2x - 2z(x)z'(x)) \equiv 0 \\ F_2'(x) & = & 4(z(x)-x)^3 \cdot (z'(x) - 1) - y'(x)z(x) \cdot (x^2 + y(x)^2) \\ & & +y(x)z'(x) \cdot (x^2 + y(x)^2) + y(x)z(x) \cdot (2x + 2y(x)y'(x)) \equiv 0 \\ F_1'(0) & = & 4 \cdot (1+0)^3 \cdot (y'(0) + z'(0)) + 1 \cdot (0-0) + 0 \cdot \ldots + 0 \cdot \ldots = 0 \\ F_2'(0) & = & 4 \cdot (0-0)^3 \cdot \ldots - 0 \cdot \ldots + z'(0)(0+1) + 0 \cdot \ldots = 0 \end{array}$$

Aus der letzten Gleichung erhält man sofort $z'(0) = 0$ und damit weiter $y'(0) = 0$.

4. Wir erhalten für die partiellen Ableitungen nach der Kettenregel:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = nx^{n-1} f\left(\frac{y}{x^3}\right) - 2x^{n-3} y f'\left(\frac{y}{x^3}\right) \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = x^{n-2} f'\left(\frac{y}{x^3}\right)$$

Demnach ist

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + 2y\frac{\partial z}{\partial y} = nx^n f\left(\frac{y}{x^3}\right) - 2x^{n-2} y f'\left(\frac{y}{x^3}\right) + 2x^{n-2} y f'\left(\frac{y}{x^3}\right) = nz$$

5. (a) Es ist $f(x, y) \in C^1$ und $f(0, -1) = -1 + 0 + e^0 = 0$. Außerdem gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 1 + 3xy^2 + xe^{xy} \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_P = 1 \neq 0,$$

es gibt also eine lokale Auflösung $y(x)$. Nun erhält man die erste Ableitung entweder aus

$$\begin{aligned} F(x) &:= f(x, y(x)) = y(x) + xy(x)^3 + e^{xy(x)} \equiv 0 \\ F'(x) &= y'(x) + y(x)^3 + 3xy(x)^2 y'(x) + e^{xy(x)} \cdot (y(x) + xy'(x)) \equiv 0 \\ F'(0) &= y'(0) - 1 + 0 \cdot \ldots + 1 \cdot (-1 + 0) = 0 \quad \rightarrow \quad y'(0) = 2 \end{aligned}$$

oder mittels

$$y'(x) = -\frac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)} = -\frac{y^3 + ye^{xy}}{1 + 3xy^2 + xe^{xy}} \qquad y'(0) = -\frac{-2}{1} = 2$$

Auf jeden Fall liegt wegen $y'(0) \neq 0$ kein lokales Extremum vor.

(b) Für kritische Punkte muss erfüllt sein

$$\begin{aligned} &f_x(x, y) = y^3 + ye^{xy} = y(y^2 + e^{xy}) = 0 && \rightarrow y = 0 \quad (y^2 + e^{xy} > 0 \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) \\ &f_y(x, y) = 1 + 3xy^2 + xe^{xy} = 0 && y = 0 \ \rightarrow \ x = -1 \end{aligned}$$

Der einzige kritische Punkt ist demnach Q(-1,0). Untersuchung der Hesse-Matrix liefert:

$$\begin{aligned} f_{xx} &= y^2 e^{xy} & f_{xy} &= 3y^2 + e^{xy} + xye^{xy} \\ f_{yx} &= f_{xy} & f_{yy} &= 1 + 6xy + x^2 e^{xy} \end{aligned} \qquad \Delta|_Q = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 < 0$$

Es handelt sich also um einen Sattelpunkt.

6. Für die ersten beiden Ableitungen ergibt sich:

$$\begin{aligned} &\tfrac{\partial f}{\partial \vec{e}_1} = f_x = -y^5 \sin(xy^5) \cdot e^{\cos(xy^5)} && f_x(\tfrac{\pi}{2}, -1) = \sin(-\tfrac{\pi}{2}) \cdot e^{\cos(-\frac{\pi}{2})} = -1 \\ &\tfrac{\partial f}{\partial \vec{e}_2} = f_y = -5xy^4 \sin(xy^5) \cdot e^{\cos(xy^5)} && f_y(\tfrac{\pi}{2}, -1) = -5\tfrac{\pi}{2} \sin(-\tfrac{\pi}{2}) \cdot e^{\cos(-\frac{\pi}{2})} = \tfrac{5\pi}{2} \end{aligned}$$

Wegen der Differenzierbarkeit von f gilt nun:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}\left(\frac{\pi}{2}, -1\right) = \vec{a} \cdot \operatorname{grad} f = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot f_x\left(\frac{\pi}{2}, -1\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot f_y\left(\frac{\pi}{2}, -1\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{5\pi}{2} - 1\right)$$

7. (a) Gradientenbildung liefert:

$$f_x(x, y) = 2(x + y) = 0 \ \rightarrow \ y = -x \qquad f_y(x, y) = 2(x + y) = 0 \ \rightarrow \ y = -x$$

Für die Determinante der Hesse-Matrix ergibt sich

$$\Delta = \det \mathbf{H} = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = 2 \cdot 2 - 2 \cdot 2 = 0,$$

das erlaubt keine Aussage. Nun ist aber $f(x, -x) = 0$ und $f(x, y) > 0$ für $y \neq -x$, also liegen überall globale Minima vor.

(b) Es ist

$$\left.\begin{array}{l} g_x = 3x^2 + 2(x+y) = 0 \\ g_y = 2(x+y) = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \ 3x^2 = 0, \quad x = 0$$

Wiederum erlaubt $\Delta|_{(0,0)} = [2 \cdot (6x+2) - 4]_{(0,0)} = 12x|_{(0,0)} = 0$ keine Aussage. Am kritischen Punkt ist $g(0,0) = 0$, es ist aber $g(x,-x) = x^3$ größer oder kleiner als Null, je nachdem, ob $x > 0$ oder $x < 0$ ist, an $(0,0)$ selbst liegt also ein Sattelpunkt.

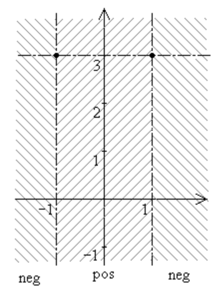
8. Als Bedingung für kritische Punkte erhält man

$$\begin{array}{llcl} f_x(x,y) = -2x \cdot (3-y)^2 = 0 & \rightarrow & x = 0 & \vee \quad y = 3 \\ f_y(x,y) = -2(1-x^2)(3-y) = 0 & \rightarrow & x = \pm 1 & \vee \quad y = 3 \end{array}$$

Da $y = 3$ beide Bedingungen erfüllt, sind alle Punkte $(x,3)$ mit $x \in \mathbb{R}$ kritische Punkte. Untersuchung der Hesse-Matrix

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} -2(3-y)^2 & 4x(3-y) \\ 4x(3-y) & 2(1-x^2) \end{pmatrix} \qquad \Delta = \det \mathbf{H} = (3-y)^2 \cdot \big[\ldots\big] = 0 \text{ für } y = 3$$

erlaubt keine Aussage. Hier hilft eine andere Betrachtung:



$(1-x^2)$ ist > 0 für $|x| < 1$ und < 0 für $|x| > 1$. $(y-3)^2$ ist bei $y = 3$ Null und sonst überall positiv. Die Funktion $f(x,y) = (1-x^2) \cdot (3-y)^2$ ist also Null für $x = -1$, $x = 1$ und $y = 3$, ansonsten positiv für $|x| < 1$ und negativ für $|x| > 1$. Damit ist sind also alle Punkte $(x,3)$ mit $|x| < 1$ lokale Minima und mit $|x| > 1$ lokale Maxima. $(-1,3)$ und $(1,3)$ sind Sattelpunkte, da es in jeder Umgebung positive und negative Werte gibt. Die gefundenen Extrema $(x,3)$, $|x| \neq 0$ sind natürlich nur lokale, keine globalen Minima oder Maxima.

9. Es sind $f_1,\ f_2 \in C^1$ und es ist $f_1(0,0,1) = 1 - 1 = 0$, $f_2(0,0,1) = 0 + 0 = 0$.

$$\left|\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(y,z)}\right|_P = \left|\begin{array}{cc} -z \cdot \sin y & \cos y - 2z \\ z \cdot \cos y & \sin y \end{array}\right|_P = \left|\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{array}\right| = 1 \neq 0,$$

eine Auflösung ist also möglich. Nun erhält man ($y = y(x)$, $z = z(x)$):

$$\begin{array}{rcl} F_1(x) & = & z \cdot \cos y - x - z^2 \equiv 0 \\ F_2(x) & = & z \cdot \sin y + \ln(1+x^2) \equiv 0 \\ F_1'(x) & = & z' \cos y - zy' \sin y - 1 - 2zz' \equiv 0 \\ F_2'(x) & = & z' \sin y + zy' \cos y + \dfrac{2x}{1+x^2} \equiv 0 \\ F_1'(0) & = & z'(0) - 0 \cdot \ldots - 1 - 2z'(0) = 0 \\ F_2'(0) & = & 0 \cdot \ldots + y'(0) + 0 \cdot \ldots = 0 \end{array}$$

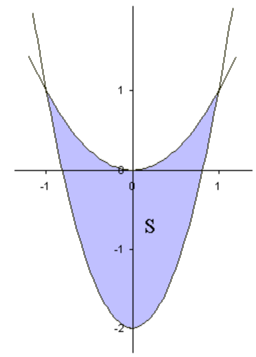
Für $z(x)$ liegt wegen $z'(0) = -1 \neq 0$ an $x = 0$ kein lokales Extremum, dagegen ist die Stelle für $y(x)$ zumindest ein kritischer Punkt, und die zweite Ableitung muss untersucht werden:

$$\begin{array}{rcll} F_1''(x) & = & z'' \cos y - 2y'z' \sin y - zy'^2 \cos y - zy'' \sin y - 2z'^2 - 2zz'' \equiv 0 & \\ F_2''(x) & = & z'' \sin y + 2y'z' \cos y - zy'^2 \sin y + zy'' \cos y + \dfrac{2-2x^2}{(1+x^2)^2} & \\ F_1''(0) & = & z''(0) - 0 \cdot \ldots - 0 \cdot \ldots - 0 \cdot \ldots - 0 \cdot \ldots - 2 - 2z''(0) = 0 & \big(z''(0) = -2\big) \\ F_2''(0) & = & 0 \cdot \ldots + 0 \cdot \ldots + 0 \cdot \ldots - 0 \cdot \ldots + y''(0) + 2 = 0 & y''(0) = -2 \end{array}$$

Wegen $y''(0) = -2 < 0$ liegt für $y(x)$ also ein lokales Maximum vor.

10. Zunächst erhält man für die Schnittpunkte der beiden Parabeln: $x^2 = 3x^2 - 2$ und damit $x^2 = 1$, $x = \pm 1$. Nun ergibt sich für das gesuchte Integral:

$$\begin{aligned}
I &= \int_{x=-1}^{1} dx \int_{y=3x^2-2}^{y=x^2} (x^2+y^2)\,dy = \int_{x=-1}^{1} dx \left[x^2 y + \frac{y^3}{3}\right]_{y=3x^2-2}^{y=x^2} = \\
&= \int_{x=-1}^{1} \left(\left[x^4 + \frac{x^6}{6}\right] - \left[3x^4 - 2x^2 + \frac{(3x^2-2)^3}{3}\right]\right) dx = \\
&= \int_{-1}^{1} \left(16x^4 + \frac{26}{3}x^6 - 10x^2 + \frac{8}{3}\right) dx = \\
&= \left[\frac{16}{5}x^5 - \frac{26}{21}x^7 - \frac{10}{3}x^3 + \frac{8}{3}x\right]_{-1}^{1} = 2 \cdot \left[\frac{16}{5} - \frac{26}{21} - \frac{10}{3} + \frac{8}{3}\right] = \frac{272}{105}
\end{aligned}$$



11. Wir sollen die Funktion $f(x,y,z) = d((x,y,z),(1,1,1))^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2$ unter der Nebenbedingung $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ minimieren bzw. maximieren. Mit der Methode der Lagrange-Multiplikatoren erhält man:

$$\begin{array}{rcl}
F(x,y,z,\lambda) & := & (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 + \lambda \cdot (x^2+y^2+z^2-1) \\
F_x & = & 2(x-1) + 2\lambda x = 0 \qquad 2\lambda x = 2(1-x) \qquad \lambda = \frac{1-x}{x} \\
F_y & = & 2(y-1) + 2\lambda y = 0 \qquad \lambda = \frac{1-y}{y} \\
F_z & = & 2(z-1) + 2\lambda z = 0 \qquad \lambda = \frac{1-z}{z} \\
F_\lambda & = & x^2+y^2+z^2-1 = 0 \qquad \Rightarrow\ 3 \cdot \frac{1}{(1+\lambda)^2} = 1 \quad \lambda = \pm\sqrt{3} - 1
\end{array}$$

Damit ist $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (min. Abstand) bzw. $x = y = z = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ (max. Abstand), wie natürlich auch geometrisch unmittelbar klar ist.

12. Man erhält $f|_{P_1} = -\frac{1}{2}$, $g|_{P_1} = -\frac{1}{4}$ und

$$f_x|_{P_1} = 2x|_{P_1} = 1 \qquad f_y|_{P_1} = 2y|_{P_1} = 1 \qquad g_x|_{P_1} = 2x|_{P_1} = 1 \qquad f_y|_{P_1} = -1|_{P_1} = -1$$

Also ist $J_1 = [f_x g_y - f_y g_x]_{P_1} = -1 - 1 = -2$ und man erhält

$$\begin{array}{rcl}
x_2 & = & x_1 - \frac{1}{J_1}[f g_y - f_y g]_{P_1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{7}{8} \\
y_2 & = & y_1 - \frac{1}{J_1}[f_x g - f g_x]_{P_1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8}
\end{array}$$

13. Minimierung der Funktion $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z$ unter den beiden Nebenbedingungen $g(x,y,z) = (x-1)^2 + y^2 - 5 = 0$ und $h(x,y,z) = y - z = 0$:

$$\begin{array}{rcl}
F(x,y,z,\lambda,\mu) & := & x^2 + y^2 + z + \lambda \cdot ((x-1)^2 + y^2 - 5) + \mu \cdot (y - z) \\
F_x & = & 2x + 2\lambda(x-1) = 0 \qquad (1+\lambda)x = \lambda \qquad x = \frac{\lambda}{1+\lambda} \\
F_y & = & 2y + 2\lambda y + \mu = 0 \qquad 2y(1+\lambda) = -\mu \qquad y = -\frac{\mu}{2(1+\lambda)} \\
F_z & = & 1 - \mu = 0 \qquad \mu = 1 \\
F_\lambda & = & (x-1)^2 + y^2 - 5 = 0 \\
F_\mu & = & y - z = 0 \qquad z = y
\end{array}$$

Setzt man $x = x(\lambda)$ aus $F_x = 0$ und $y = y(\lambda)$ aus $F_y = 0$ (mit $\mu = 1$) nun in $F_\lambda = 0$ ein, so erhält man

$$\left(\frac{\lambda}{1+\lambda} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{2(1+\lambda)}\right)^2 - 5 = 0 \qquad \frac{5}{4} = 5(1+\lambda)^2 \qquad \lambda = -1 \pm \frac{1}{2}$$

Daraus ergeben sich die Koordinaten:

$$x = \frac{-1 \pm \frac{1}{2}}{\pm\frac{1}{2}} = 1 \mp 2 \qquad y = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\pm\frac{1}{2}} = \mp 1 = z,$$

also die Punkte $P(-1,-1,-1)$ und $Q(3,1,1)$. Wegen der Kompaktheit von $(g=0)\cap(h=0)$ und $f|_P = 1$, $f|_Q = 11$ liegt an P ein Minimum und an Q ein Maximum.

14. Für Flächeninhalt und Schwerpunkt erhält man:

$$\begin{aligned}
A &= \iint_S dx\,dy = \int_{x=0}^{1}\int_{\underline{y}=x^2}^{\overline{y}=1} dx\,dy = \int_{x=0}^{1} y\Big|_{\underline{y}=x^2}^{\overline{y}=1} dx = \int_0^1 (1-x^2)\,dx = \left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}\\
x_S &= \frac{1}{A}\int_{x=0}^{1}\int_{\underline{y}=x^2}^{\overline{y}=1} x\,dx\,dy = \frac{1}{A}\int_{x=0}^{1} xy\Big|_{\underline{y}=x^2}^{\overline{y}=1} dx = \frac{1}{A}\int_0^1 (x-x^3)\,dx = \frac{3}{2}\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{3}{8}\\
y_S &= \frac{1}{A}\int_{x=0}^{1}\int_{\underline{y}=x^2}^{\overline{y}=1} y\,dx\,dy = \frac{1}{A}\int_{x=0}^{1} \frac{y^2}{2}\Bigg|_{\underline{y}=x^2}^{\overline{y}=1} dx = \frac{1}{A}\int_0^1 \left(\frac{1}{2}-\frac{x^4}{2}\right) dx = \frac{3}{2}\left[\frac{x}{2}-\frac{x^5}{10}\right]_0^1 = \frac{3}{5}
\end{aligned}$$

Für das Integral ist es günstig, die Integrationsreihenfolge zu vertauschen:

$$\begin{aligned}
I &= \iint_S \sqrt{y}\cdot e^{x\cdot\sqrt{y}}\,dx\,dy = \int_{y=0}^{1}\int_{\underline{x}=0}^{\overline{x}=\sqrt{y}} \sqrt{y}\cdot e^{x\cdot\sqrt{y}} dy\,dx =\\
&= \int_{y=0}^{1} e^{x\cdot\sqrt{y}}\Big|_{\underline{x}=0}^{\overline{x}=\sqrt{y}} dy = \int_0^1 (e^y-1)\,dy = \left[e^y-y\right]_0^1 = e-2
\end{aligned}$$

15. Für diese Fläche ergibt sich

$$\begin{aligned}
A &= \iint_S dx\,dy = \int_{x=-\pi/3}^{\pi/3}\int_{\underline{y}=1/2}^{\overline{y}=\cos x} dx\,dy = \int_{-\pi/3}^{\pi/3}\left(\cos x-\frac{1}{2}\right) = \left[\sin x-\frac{x}{2}\right]_{-\pi/3}^{\pi/3} = 0{,}68485\ldots\\
x_S &= 0 \qquad \text{(Symmetrie)}\\
y_S &= \frac{1}{A}\iint_S y\,dx\,dy = \frac{1}{A}\int_{x=-\pi/3}^{\pi/3}\int_{\underline{y}=1/2}^{\overline{y}=\cos x} y\,dx\,dy = \frac{1}{2A}\int_{-\pi/3}^{\pi/3}\left(\cos^2 x-\frac{1}{4}\right) =\\
&= \frac{1}{2A}\left[\frac{1}{2}(x+\sin x\,\cos x)-\frac{x}{4}\right]_{-\pi/3}^{\pi/3} = 0{,}69840\ldots\\
I_y &= \iint_S x^2\,dx\,dy = \int_{x=-\pi/3}^{\pi/3}\int_{\underline{y}=1/2}^{\overline{y}=\cos x} dx\,dy = \int_{-\pi/3}^{\pi/3}\left(x^2\cos x-\frac{x^2}{2}\right) = \ldots =\\
&= \left[x^2\,\sin x+2x\,\cos x-2\sin x-\frac{x^3}{6}\right]_{-\pi/3}^{\pi/3} = 0{,}14690\ldots
\end{aligned}$$

A.3 Lösungen: Kapitel Neun

A.3.1 Lösungen der Übungsaufgaben

1. Für $\vec{V}$ erhält man

$$\begin{aligned}\text{rot } \vec{V} &= \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} yz^3 \\ xz^3 \\ 3xyz^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3xz^2 - 3xz^2 \\ -3yz^2 + 3yz^2 \\ z^3 - z^3 \end{pmatrix} = \vec{0} \\ \text{div } \vec{V} &= \frac{\partial yz^3}{\partial x} + \frac{\partial xz^3}{\partial y} + \frac{\partial 3xyz^2}{\partial z} = 0 + 0 + 6xyz = 6xyz \\ \text{grad div } \vec{V} &= \text{grad } (6xyz) = \begin{pmatrix} 6yz \\ 6xz \\ 6xy \end{pmatrix}\end{aligned}$$

   Wegen rot $\vec{V} = \vec{0}$ gibt es ein Potential; entweder durch Integration oder über Hinschauen erhält man $\varphi(x, y, z) = xyz^3$. Damit ergibt das Kurvenintegral einfach

$$I = \int_C \vec{V}\, d\vec{x} = \varphi(1, 2, 3) - \varphi(0, 0, 0) = 54$$

2. Untersuchung der Integrabilitätsbedingungen liefert:

$$\frac{\partial V_1}{\partial y} = e^y = \frac{\partial V_2}{\partial x} \qquad \frac{\partial V_1}{\partial z} = -e^x = \frac{\partial V_3}{\partial x} \qquad \frac{\partial V_2}{\partial z} = 0 = \frac{\partial V_3}{\partial y},$$

   also ist das Integral wegunabhängig und es existiert ein Potential φ. Für dieses erhält man:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi = \int (e^y - ze^x)\, dx = xe^y - ze^x + w_1(y, z) \\ \varphi = \int xe^y\, dy = xe^y + w_2(x, z) \\ \varphi = -\int e^x\, dz = -ze^x + w_3(x, y) \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi(x, y, z) = xe^y - ze^x$$

   Damit ist $I = \varphi(2, 3, 4) - \varphi(1, 1, 1) = (2e^3 - 4e^2) - (e - e) = 2e^3 - 4e^2$.

3. Die Integrabilitätsbedingtungen sind nicht erfüllt, also muss man parametrisieren:

$$\begin{aligned} C_1 \quad &: \quad \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \qquad t \in [0, \tfrac{\pi}{2}] \qquad \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \\ I_1 \quad &= \quad \int_0^{\pi/2} \left\{ -(\cos^2 t + \sin^2 t) \sin t + e^{\sin t} \cos t \right\} dt = \\ &= \quad -\int_0^{\pi/2} \sin t\, dt + \int_0^{\pi/2} e^{\sin t} \cos t\, dt = \Big[\cos t\Big]_0^{\pi/2} + \Big[e^{\sin t}\Big]_0^{\pi/2} = e - 2 \end{aligned}$$

   Für den zweiten Weg erhält man analog:

$$\begin{aligned} C_2 \quad &: \quad \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 - t \\ t \end{pmatrix} \qquad t \in [0, 1] \qquad \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ I_2 \quad &= \quad \int_0^{\pi/2} \left\{ -((1 - t)^2 + t^2) + e^t \right\} dt = \int_0^{\pi/2} (2t - 2t^2 - 1 + e^t)\, dt = \\ &= \quad -\left[t^2 - \frac{2t^3}{3} - t + e^t \right]_0^{\pi/2} = e - \frac{5}{3} \end{aligned}$$

4. Überprüfen der Integrabilitätsbedingungen liefert:

$$\frac{\partial V_1}{\partial x_2} = \cos x_2\, e^{x_1 \sin x_2} + x_1 \sin x_2 \cos x_2\, e^{x_1 \sin x_2} = \frac{\partial V_2}{\partial x_1} \qquad \frac{\partial V_3}{\partial x_4} = 2x_4 = \frac{\partial V_4}{\partial x_3},$$

   alle anderen sind offensichtlich erfüllt. Als Potential erhält man $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = e^{x_1 \sin x_2} + x_3 x_4^2$.

5. Zunächst bestimmen wir die Tangentialvektoren an die Parameterkurven

$$\vec{x}_u = \begin{pmatrix} 2\sin u\,\cos u\,\cos v \\ 2\sin u\,\cos u\,\sin v \\ \cos^2 u - \sin^2 u \end{pmatrix} \qquad \vec{x}_v = \begin{pmatrix} -\sin^2 u\,\sin v \\ \sin^2 u\,\cos v \\ 0 \end{pmatrix}$$

und den Normalvektor an die Fläche:

$$\vec{x}_u \times \vec{x}_v = \begin{pmatrix} \sin^2 u\,\cos v\,(\sin^2 u - \cos^2 u) \\ \sin^2 u\,\sin v\,(\sin^2 u - \cos^2 u) \\ 2\sin^3 u \cos u \end{pmatrix}$$

Dessen Betrag ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} |\vec{x}_u \times \vec{x}_v| &= \sqrt{\sin^4 u\,\cos^2 v\,(\sin^2 u - \cos^2 u)^2 + \sin^4 u\,\sin^2 v\,(\sin^2 u - \cos^2 u)^2 + 4\sin^6 u\cos^2 u} = \\ &= \sqrt{\sin^4 u\,(\sin^4 u - 2\sin^2 u\,\cos^2 u + \cos^4 u) + 4\sin^6 u\cos^2 u} = \\ &= \sqrt{\sin^4 u\,(\sin^4 u + 2\sin^2 u\,\cos^2 u + \cos^4 u)} = \sqrt{\sin^4 u\,(\sin^2 u + \cos^2 u)^2} = \sin^2 u \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für den Flächeninhalt

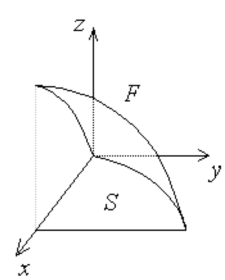
$$\begin{aligned} \int_F d\sigma &= \int_{u=0}^{\pi}\int_{v=0}^{2\pi} |\vec{x}_u \times \vec{x}_v|\; du\,dv = \int_{u=0}^{\pi}\int_{v=0}^{2\pi} \sin^2 u\,du\,dv = \\ &= \int_{v=0}^{2\pi} dv \cdot \int_{u=0}^{\pi} \sin^2 u\,du = 2\pi\cdot\frac{\pi}{2} = \pi^2 \end{aligned}$$

6. Die Fläche F ist definiert durch $z(x,y) = \sqrt{4x - y^2}$ über dem Bereich

$$S = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2\sqrt{x}\}.$$

Für die Ableitungen von z nach x und y erhält man $z_x = \frac{2}{\sqrt{4x-y^2}}$, $z_y = -\frac{y}{\sqrt{4x-y^2}}$ und damit für das Oberflächenintegral:

$$\begin{aligned} \int_F G\,d\sigma &= \iint_S G(x,y,z(x,y))\cdot\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\,dx\,dy = \\ &= \iint_S \frac{y\sqrt{4x-y^2}}{\sqrt{1+x}}\cdot\sqrt{1 + \frac{4}{4x-y^2} + \frac{y^2}{4x-y^2}}\,dx\,dy = \\ &= \iint_S \frac{y\sqrt{4x-y^2}}{\sqrt{1+x}}\cdot\sqrt{\frac{4x-y^2+4+y^2}{4x-y^2}}\,dx\,dy = \iint_S 2y\,dx\,dy = \\ &= \int_{x=0}^{2}\int_{\underline{y}=0}^{\overline{y}=2\sqrt{x}} 2y\,dy = \int_{x=0}^{2} y^2\Big|_{\underline{y}=0}^{\overline{y}=2\sqrt{x}} = \int_0^2 4x\,dx = 2x^2\Big|_0^2 = 8 \end{aligned}$$



7. Für diese Fläche ist $z_x = 0$, $z_y = 2y$ und damit erhält man

$$\begin{aligned} \int_F y\,d\sigma &= \iint_S y\,\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\,dx\,dy = \iint_S y\,\sqrt{1+4y^2}\,dx\,dy = \int_{x=0}^{2}\int_{\underline{y}=0}^{\overline{y}=\sqrt{x}} y(1+4y^2)^{1/2}dy\,dy = \\ &= \frac{1}{12}\int_{x=0}^{2} (1+4y^2)^{3/2}\Big|_{\underline{y}=0}^{\overline{y}=\sqrt{x}} = \frac{1}{12}\int_0^2 \left[(1+4x)^{3/2} - 1\right] dx = \frac{1}{12}\left[\frac{1}{10}(1+4x)^{5/2} - x\right]_0^2 = \\ &= \frac{1}{12}\left[\frac{1}{10}(3^5 - 1) - 2\right] = \frac{243}{120} - \frac{1}{120} - \frac{20}{120} = \frac{37}{20} \end{aligned}$$

8. Untersuchen der Integrabilitätsbedingungen liefert:

$$\frac{\partial V_1}{\partial y} = -2x\sin^2(xy) + 2x\cos^2(xy) \neq 2y\sin^2(xy) - 2y\cos^2(xy) = \frac{\partial V_2}{\partial x},$$

demnach besitzt das Vektorfeld kein Potential. Nun parametrisiert man:

$$K_1: \ \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \ \dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ t \in [0,1] \qquad K_2: \ \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}, \ \dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ t \in [0, \tfrac{\pi}{2}]$$

und das Integral errechnet sich zu

$$\begin{aligned}
\int_K \vec{V}\, d\vec{x} &= \int_{K_1} \{V_1\, dx + V_2\, dy\} + \int_{K_2} \{V_1\, dx + V_2\, dy\} = \\
&= \int_0^1 \{2 \cdot 1 \cdot 0 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 0 \cdot 0\}\, dt + \int_0^{\pi/2} \{2 \cos t\, \sin t \cdot 0 - 2 \cos t\, \sin t \cdot 1\}\, dt = \\
&= -\int_0^{\pi/2} 2 \cos t\, \sin t\, dt = \cos^2 t \Big|_0^{\pi/2} = 0 - 1 = -1
\end{aligned}$$

A.4 Lösungen: Kapitel Zehn

A.4.1 Lösungen der Übungsaufgaben

1. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos t}{t^4 + 4\pi^4}\, dt = \mathrm{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it}}{t^4 + 4\pi^4}\, dt$

   Die Pole des Integranden liegen an den Nullstellen von $z^4 + 4\pi^4$: $z_1 = \sqrt{2}\pi e^{i\pi/4}$, $z_2 = \sqrt{2}\pi e^{i3\pi/4}$, $z_3 = \sqrt{2}\pi e^{-i\pi/4}$ und $z_4 = \sqrt{2}\pi e^{-i3\pi/4}$. Nur z_1 und z_2 befinden sich in der oberen Halbebene.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z^4+4\pi^4}, z_1\right) &= \left.\frac{e^{iz}}{4z^3}\right|_{z_1} = \frac{\exp(i(\sqrt{2}\pi(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}})))}{4\cdot 2^{3/2}\pi^3 e^{i3\pi/4}} = \frac{e^{i\pi-\pi}}{8\cdot\sqrt{2}\pi^3} e^{-i\frac{3\pi}{4}} = \\
&= \frac{e^{i\pi-\pi}}{8\cdot\sqrt{2}\pi^3}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -e^{i\pi}\frac{e^{-\pi}}{16\pi^3}(1+i) = \frac{e^{-\pi}}{16\pi^3}(1+i) \\
\mathrm{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z^4+4\pi^4}, z_2\right) &= \left.\frac{e^{iz}}{4z^3}\right|_{z_2} = \frac{\exp(i(\sqrt{2}\pi(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}})))}{4\cdot 2^{3/2}\pi^3 e^{i\pi/4}} = \frac{e^{-i\pi-\pi}}{8\cdot\sqrt{2}\pi^3} e^{-i\frac{\pi}{4}} = \\
&= \frac{e^{-i\pi-\pi}}{8\cdot\sqrt{2}\pi^3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -e^{-i\pi}\frac{e^{-\pi}}{16\pi^3}(-1+i) = \frac{e^{-\pi}}{16\pi^3}(-1+i) \\
\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{it}}{t^4+4\pi^4}\,dt &= 2\pi i\cdot\left(\mathrm{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z^4+4\pi^4}, z_1\right) + \mathrm{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z^4+4\pi^4}, z_2\right)\right) = \\
&= 2\pi i\cdot\left(\frac{e^{-\pi}}{16\pi^3}(1+i) + \frac{e^{-\pi}}{16\pi^3}(-1+i)\right) = 2\pi i\cdot\frac{e^{-\pi}}{16\pi^3}\cdot 2i = -\frac{e^{-\pi}}{4\pi^2}
\end{aligned}$$

2. $\int_0^{2\pi} \frac{1}{5+4\sin t}\, dt = 2\pi i \cdot \sum_{|z_j|<1} \mathrm{Res}\,(f(z), z_j)$ mit $f(z) := \frac{1}{iz}\cdot\frac{1}{5 + 4\cdot\frac{1}{2i}(z+\frac{1}{z})} = \frac{1}{2z^2+5iz-2}$

   Die Nullstellen von f liegen an

$$z = -\frac{5}{2}i \pm \sqrt{-\frac{25}{16}+1} = -\frac{5}{2}i \pm \frac{3}{4}i \qquad z_1 = -\frac{1}{2}i, \quad z_2 = -2i,$$

   davon ist nur z_1 für die Berechnung des Integrals relevant:

$$\mathrm{Res}\,(f(z), -\tfrac{1}{2}i) = \lim_{z\to -i/2}(z+\tfrac{i}{2})\frac{1}{2(z+\frac{i}{2})(z+2i)} = \frac{1}{2(-\frac{i}{2}+2i)} = \frac{1}{2\cdot\frac{3}{2}i} = -\frac{1}{3}i$$

   Damit erhält man: $\int_0^{2\pi}\frac{1}{5+4\sin t}\,dt = 2\pi i\cdot\left(-\frac{1}{3}i\right) = \frac{2\pi}{3}.$

A.4.2 Kapitel Sechs

1.
2.
3.

A.4.3 Kapitel Sechs

1.

2.

3.

Inhaltsverzeichnis