Gelegentlich enthalten die Aufgaben mehr Angaben, als für die Lösung erforderlich sind. Bei einigen anderen dagegen werden Daten aus dem Allgemeinwissen, aus anderen Quellen oder sinnvolle Schätzungen benötigt.

•	einfache Aufgaben mit wenigen Rechenschritten
••	mittelschwere Aufgaben, die etwas Denkarbeit und unter Umständen die Kombination verschiedener Konzepte erfordern
•••	anspruchsvolle Aufgaben, die fortgeschrittene Konzepte (unter Umständenauch aus späteren Kapiteln) oder eigene mathematische Modellbildung benötigen

Verständnisfragen

1 • Warum werden leere Summen gleich Null, leere Produkte aber gleich Eins gesetzt?

2 • Bestimmen Sie die Summe aller natürlichen Zahlen von Eins bis Tausend.

3 • Ein müder Floh springt zuerst einen Meter, dann nur mehr einen halben, dann gar nur mehr einen Viertelmeter, kurz bei jedem Sprung schafft er nur mehr die Hälfte der vorangegangenen Distanz. Wie weit ist er nach sieben Sprüngen gekommen?

4 • Wie viele Summanden haben die folgenden Summen?

$$A = \sum_{m>n\geq 1}^{9} a_{m,n} \qquad B = \sum_{\substack{m=1\\n=1}}^{9}{}' \, b_{m,n}$$

5 • Scheitert der Beweis von „$2n+1$ ist für alle $n \geq 100$ eine gerade Zahl" am Induktionsanfang, am Induktionsschritt oder an beidem?

6 •• Führen Sie analog zum Vorgehen für $\mathbb{Z}$ auf Seite **??** die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ mit Hilfe einer geeigneten Äquivalenzrelation ein.

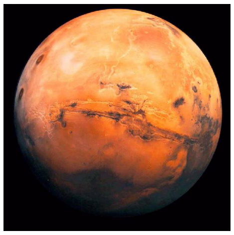
7 •• a_k mit $k \in \mathbb{N}$ seien beliebige reelle Zahlen. Eine Summe der Form

$$T_n := \sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k)$$

nennt man eine *Teleskopsumme*. Bestimmen Sie eine geschlossene Formel für den Wert einer solchen Summe und beweisen Sie sie mittels vollständiger Induktion.

8 •• Finden Sie eine Aussage (zusätzlich zu den bereits auf Seite **??** angegebenen), die für alle $n \in \mathbb{N}$ falsch ist, für die sich der Induktionsschritt aber trotzdem durchführen lässt.

9 ••• Finden Sie den Fehler im folgenden „Beweis" dafür, dass der Mars bewohnt ist:
Satz: Wenn in einer Menge von n Planeten einer bewohnt ist, dann sind alle bewohnt.
Beweis mittels vollständiger Induktion:
$n = 1$: trivial
$n \to n+1$: Laut Annahme sind von einer Menge von n Planeten alle bewohnt, sobald nur einer bewohnt ist. Nun betrachten wir eine Menge von $n+1$ Planeten (die wir willkürlich mit p_1 bis p_{n+1} bezeichnen). Von diesen schließen wir vorläufig einen aus unsere Betrachtungen aus, z.B. p_{n+1}. Wenn von der übriggebliebenen Menge von n Planeten nur einer bewohnt ist, sind alle bewohnt (laut Annahme). Nun schließen wir von den n bewohnten Planeten einen aus, z.B. p_1, und nehmen p_{n+1} wieder hinzu. Wir erhalten wieder eine Menge von n Planeten, die bis aus p_{n+1} bewohnt sind. Auf jeden Fall ist einer bewohnt, demnach alle, also ist auch p_{n+1} bewohnt.



Korollar: Der Mars ist bewohnt. **Beweis**: Betrachte die Planeten des Sonnensystems ($n = 9$, von ungesicherten astronomischen Beobachtungen wollen wir hier absehen).
Die Erde ist bewohnt, damit sind alle Planeten des Sonnensystems bewohnt – auch der Mars.

Rechenaufgaben und Anwendungsprobleme

10 • Man beweise mittels vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n} (2k+1) = n\,(n+2)$$

11 • Man beweise für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$:

$$\prod_{k=2}^{n} (k-1) = (n-1)!$$

12 •• Man beweise für alle $n \geq 1$ die Gültigkeit der

Summenformeln zweiter und dritter Ordnung

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6} \qquad (10.1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{n\,(n+1)}{2}\right\}^2 \qquad (10.2)$$

13 •• Man beweise die Pascal'sche Formel

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

(**??**) einerseits durch direktes Nachrechnen, andererseits durch vollständige Induktion.

14 •• Man beweise durch vollständige Induktion für alle natürlichen n:

$$\sum_{k=1}^{n} (k-1)^2 < \frac{n^3}{3}$$

15 •• Man beweise für $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

16 •• Man zeige für $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (n+k)\,(n-k) = \frac{n\,(n+1)\,(4n-1)}{6}$$

17 •• Man beweise für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k = 2 + 2^{n+1} \cdot (n-1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\,k^2 = (-1)^{n+1}\,\frac{n\,(n+1)}{2}$$

18 •• Beweisen Sie mittels Induktion für alle natürlichen n:

- $n^3 + 5n$ ist durch 6 teilbar
- $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ ist durch 133 teilbar
- $3^{(2^n)} - 1$ ist durch 2^{n+2} teilbar

19 •• Beweisen oder widerlegen Sie:

$$p_n := n^2 - n + 41$$

ist für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Primzahl.

20 ••• Man beweise

$$\prod_{k=1}^{n} (1 + x_k) \geq 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n,$$

wenn alle $x_k \in (-1, 0)$ oder alle $x_k \geq 0$ sind und leite daraus die Bernoulli-Ungleichung

$$(1+a)^n \geq 1 + n\,a$$

für $a > -1$ ab.

21 ••• Man beweise für alle $\in \mathbb{N}$, $n \geq 2$:

$$\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{2}{k\,(k+1)}\right) = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{n}\right)$$

22 ••• $x \in \mathbb{R}$ sei eine feste Zahl, und es sei $p_1(x) := 1 + x$. Nun definieren wir für $n \in \mathbb{N}$:

$$p_{n+1}(x) = \left(1 + x^{2n}\right) \cdot p_n(x)$$

Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{2^n - 1} x^k$$

23 ••• Beweisen Sie für $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$$

Ergänzungsaufgaben

24 • Man beweise mittels vollständiger Induktion für alle natürlichen Zahlen n:

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$$

25 •• Man beweise mittels Induktion für alle natürlichen Zahlen n:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k \right)^2$$

26 •• Man beweise für $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}$$

27 •• Man beweise für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = \frac{2^{n+1}-n-2}{2^n}$$

28 •• Beweisen Sie mittels Induktion für alle natürlichen n:

- $7^n - 2^n$ ist durch 5 teilbar
- $6^n - 5n + 1$ ist durch 5 teilbar
- $(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3$ ist durch 9 teilbar

29 ••• Beweisen Sie für $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{4^n}{n+1} \leq \binom{2n}{n} \leq \frac{4^n}{\sqrt{3n+1}}$$

Die folgenden beiden Aufgaben setzen die Kenntnis der Produktregel $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(fg) = f'g + fg'$ *der Differentialrechnung voraus:*

30 •• Beweisen Sie die

Erweiterte Produktregel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f_1\, f_2 \ldots f_n) = \\ = f_1'\, f_2 \ldots f_n + f_1\, f_2' \ldots f_n + \ldots + f_1\, f_2 \ldots f_n'$$

31 ••• Beweisen Sie für $n \in \mathbb{N}$ die

Leibniz'sche Ableitungsformel

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(f\,g) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}\, g^{(k)} \qquad (10.3)$$

(Hinweis: Die Pascal'sche Beziehung (**??**) erweist sich hier wieder einmal als nützlich.)

AUFGABEN

Gelegentlich enthalten die Aufgaben mehr Angaben, als für die Lösung erforderlich sind. Bei einigen anderen dagegen werden Daten aus dem Allgemeinwissen, aus anderen Quellen oder sinnvolle Schätzungen benötigt.

•	einfache Aufgaben mit wenigen Rechenschritten
••	mittelschwere Aufgaben, die etwas Denkarbeit und unter Umständen die Kombination verschiedener Konzepte erfordern
•••	anspruchsvolle Aufgaben, die fortgeschrittene Konzepte (unter Umständenauch aus späteren Kapiteln) oder eigene mathematische Modellbildung benötigen

Verständnisfragen

1 • Warum erkennt man ohne Rechnung, dass die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$$

divergieren?

2 •• Konstruieren Sie eine divergente Reihe der Form

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\, a_n,$$

wobei a_n eine positive Nullfolge sein soll. Warum besteht hier kein Widerspruch zum Leibniz-Kriterium?

3 •• (a_n) sei eine beliebige Folge reeller Zahlen. Unter welcher Bedingung konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1})\,,$$

und was ist dann ihr Wert? Was läßt sich daraus über die Konvergenz der beiden Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}$$

ausagen? (Hinweis: Partialsummen betrachten)

4 •• (a_n) sei eine monoton wachsende und beschränkte Folge mit positiven Gliedern. Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)$$

konvergiert. (Hinweis: Man benutze, dass mit der Monotonie natürlich $a_1 \leq a_n$ für alle n ist.)

5 ••• Beweisen Sie das Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen. (Hinweis: Untersuchen Sie die Partialsummenfolgen (s_{2n}) und (s_{2n+1}) mit Hilfe des Hauptsatzes für monotone Zahlenfolgen auf Konvergenz.)

6 ••• Beweisen Sie den Cauchy'schen Verdichtungssatz. (Hinweis: Untersuchen Sie zunächst eine allgemeine Partialsumme s_{2^k} und finden Sie geeignete Abschätzungen nach oben bzw. nach unten.)

Rechenaufgaben und Anwendungsprobleme

7 •• Der Erwartungswert einer Größe ist die Summe aller möglichen Werte gewichtet mit jeweils der Wahrscheinlichkeit für ihr Eintreten (siehe auch **??**).

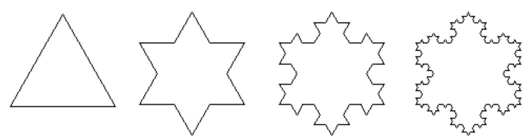
So ist der Erwartungswert eines (fairen) n-seitigen Würfels

$$\langle W_n\rangle = \frac{1}{n}\,(1+2+\ldots+n) = \\ = \frac{1}{n}\,\frac{n\,(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$$

Bestimmen Sie, wie sich dieser Wert durch die Zusatzregel ändert, dass beim Würfeln der höchsten Zahl n jeweils weitergewürfelt und das Ergebnis immer zum bisherigen addiert wird.

8 •• Die Koch'sche Schneeflockenkurve wird auf folgende Art konstruiert: Man beginnt mit einem gleichseitigen Dreieck der Seitenlänge s. Aus dessen Seiten wird nun jeweils das mittlere Drittel entfernt und darüber ein neues gleichseitiges Dreieck der Seitenlänge $s/3$ errichtet. (Dabei verwirft man die Basisseite, man erhält insgesamt also eine einzelne geschlossene und unverzweigte Linie.)

Dieses Entfernen des mittleren Drittels und Aufsetzen eines kleineren Dreiecks wird nun mit allen gerade Abschnitten wiederholt, und zwar immer wieder. Im Grenzübergang zu unendlich vielen Schritten erhält man so die Schneeflockenkurve.



Bestimmen Sie die den Umfang und den Flächeninhalt des Gebildes nach n derartigen Schritten bzw. für die fertige Schneeflockenkurve ($n \to \infty$).

9 •• Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+n^2}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{3n+1}}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3}$ d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2-n-1}{7n^3+14}$

10 •• Man untersuche die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n+3)}{n\,!}$$

auf Konvergenz.

11 •• Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin\sqrt{n}}{n^{5/2}}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln\sqrt{n}}{n^{5/4}}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{1+\sqrt{n}}$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \cdot 3^n}{n\,!}$

12 •• Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot (\sqrt{n}+1)}{n^2+5n-1}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{n}\right)^n$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+7}{n^3-4n^2+8n-16}$

13 •• Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)^n}{5^n\, n!}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \binom{4n}{3n}^{-1}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n \cdot 4^n}$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+n^2}}$

14 •• Man bestimme jeweils alle $x \in \mathbb{R}$, für die die folgenden Reihen konvergieren:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sin 2x)^n$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (x^2-4)^n$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{nx}$

15 ••• Überprüfen Sie die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\left(\pi \cdot \left(n+\frac{4}{n}\right)\right)$$

auf Konvergenz.

16 ••• Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, q^n$$

genau für $|q| < 1$ konvergiert und bestimmen Sie ihren Wert. (Hinweis: Nutzen Sie die Analogie zur geometrischen Reihe.)