Kapitel 10

Fourier-Reihen

Fourier-Reihen sind seit langer Zeit ein zentrales Thema in der Analysis, das auch immer wieder Anstöße zu neuen Entwicklungen gab. Ursprung des Problems war die Saitenschwingungsgleichung, zu deren Lösung es notwendig ist, recht willkürliche Funktionen als Reihen über Sinus- und Cosinusfunktionen darzustellen – also gewissermaßen eine Frequenzanalyse durchzuführen.

Unter recht moderaten Voraussetzungen gelingt das auch und die Bestimmung der Reihenkoeffizienten wird zu einem reinen Integrationsproblem. Um diese Vorgehensweise aber zu begründen, müssen wir auf das Konzept der Vektorräume von Funktionen zurückgreifen – und werden dabei sehen, wie groß die Durchschlagkraft scheinbar recht abstrakter Konzepte wirklich ist.

10.1 Einleitung: Die Saitenschwingungsgleichung

Eine schwingende Saite der Länge L, die an beiden Enden eingespannt ist, wird durch die *Saitenschwingungsgleichung*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \text{mit} \qquad u(0,t) = u(L,t) = 0$$

beschrieben, wobei $u(x,t)$ die Auslenkung und $\alpha > 0$ eine Materialkonstante ist.

Eine solche Gleichung, die partielle Ableitungen verknüpft, nennt man eine *partielle Differentialgleichung* (PDG). Derartige Gleichungen sind im Allgemeinen recht schwierig zu lösen. Ein Ansatz, der oft recht gut funktioniert, ist es, jene Lösungen aufzusuchen, die als Produkt einfacherer Funktionen geschrieben werden können, hier also in der Form $u(x,t) = v(x)\,w(t)$. Dieser Ansatz liefert:

$$v(x)\,\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}t^2} = \alpha^2\,\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2}\,w(t)$$

oder nach Division durch $v(x)\,w(t)$:

$$\frac{1}{w(t)}\,\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}t^2} = \alpha^2\,\frac{1}{v(x)}\,\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2}$$

Nun hängt die linke Seite nur noch von t, die rechte hingegen nur von x ab. Das kann nur dann gutgehen, wenn jede Seite ohnehin schon *konstant* ist. Diese Konstante setzen wir nun als $-\lambda^2$ fest.[1] Damit müssen v und w also die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} + \lambda^2\, v(x) = 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}t^2} + \alpha^2 \lambda^2\, w(t) = 0$$

erfüllen, deren Lösungen man sofort angeben kann, nämlich

$$v(x) = C_1 \cos(\lambda x) + C_2 \sin(\lambda x) \qquad \text{und} \qquad w(t) = D_1 \cos(\alpha\lambda t) + D_2 \sin(\alpha\lambda t)$$

Das ist aber nur die halbe Wahrheit. Bisher wurden nämlich die Randbedingungen, nämlich $u(0,t) = u(L,t) = 0$ für alle t, nicht berücksichtigt. Es muss also $v(0) = v(L) = 0$ sein. Der Cosinus kann das wegen $\cos 0 = 1$ nie erfüllen, damit bleibt nur der Sinus übrig, der an $x = 0$ sicher Null ist. Damit aber auch $v(L) = 0$ ist, muss entweder $C_2 = 0$ sein (der uninteressante Fall der ruhenden Saite) oder eben

$$\lambda = \frac{k\pi}{L}$$

mit $k \in \mathbb{N}$ sein. Eine Lösung der Differentialgleichung mitsamt Einspannbedingung sind also die (mit k durchnummerierbaren) Funktionen

$$u_k(x,t) = \sin\frac{k\pi x}{L} \cdot \left(A_k \cos\frac{\alpha k\pi t}{L} + B_k \sin\frac{\alpha k\pi t}{L} \right)$$

Nun ist das aber immer noch nicht ganz zufriedenstellend. Meist wird ja die Saite zusätzlich Anfangsbedingungen unterliegen, beispielsweise gezupft oder geschlagen werden. Es sind also (im Prinzip willkürliche) Funktionen $g(x)$ und $h(x)$ vorgegeben, für die gelten soll

$$u(x,0) = g(x) \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = h(x)$$

Nun werden die oben angegebenen Funktionen $u_k(x,t)$ diese Bedingungen nur in Ausnahmefällen erfüllen. Die Idee ist nun, dass zwar kein u_k für sich, vielleicht aber doch eine Summe oder – besser noch – eine entsprechende Reihe

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin\frac{k\pi x}{L} \cdot \left(A_k \cos\frac{\alpha k\pi t}{L} + B_k \sin\frac{\alpha k\pi t}{L} \right)$$

all das leistet. Damit muss aber gelten:

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\frac{k\pi x}{L} \overset{!}{=} g(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha k\pi}{L} B_k \sin\frac{k\pi x}{L} \overset{!}{=} h(x) \end{aligned}$$

[1] Dass hier sofort das Quadrat einer Zahl geschrieben wird, ist eher prophetisch angehaucht. Bald wird man sehen, dass dadurch die Lösungen schöner werden. Da λ ja prinzipiell auch komplex sein könnte, ist dieser Ansatz keinerlei Einschränkung.

Wir stehen nun also vor dem Problem, weitestgehende willkürliche Funktionen (die u.U. nicht differenzierbar, ja nicht einmal stetig sein müssen), durch Reihen über trigonometrische Funktionen zu approximieren.

Um dieses Problem allgemeiner zu fassen, betrachten wir nun eine periodische Funktion $f(x)$ mit Periodenlänge $2L$, es gelte also $f(x+2L) = f(x)$. Der Einfachheit halber nehmen wir in Zukunft meist $L = \pi$ an, eine Verallgemeinerung macht aber keine Schwierigkeiten. Nun wollen wir f in ihre *harmonischen Bestandteile* zerlegen, suchen also eine Darstellung

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx).$$

Die Koeffizienten a_k und b_k geben also an, wie stark die Schwingungen mit der Wellenlänge $\frac{2\pi}{k}$ in der Funktion $f(x)$ vertreten sind.[2] Dass eine solche Darstellung überhaupt (zumindest in vielen Fällen) möglich ist, ist in der Tat erstaunlich.

Die Frage allerdings, unter welchen Voraussetzungen und wie gut die oben angegebene *Fourier-Reihe* konvergiert, gehört zu den schwierigsten der Mathematik überhaupt und gab auch immer wieder Anstöße zu neuen Entwicklungen in der Analysis.

Mit diesen Feinheiten können wir uns hier natürlich nicht auseinandersetzen, für einigermaßen „vernünftige" Funktionen f werden wie die Frage nach der Entwicklung letzendlich auf ein einfaches Integrationsproblem zurückführen können. Dazu benötigen aber ein Grundwissen über Orthogonal- und Orthonormalsysteme – und genau damit werden wir uns nun beschäftigen.

10.2 Orthogonalsysteme

Wir gehen von einem unitären Funktionenraum aus, also einem Vektorraum von Funktionen, für den ein Skalarprodukt definiert ist – und zwar auf die gewohnte Weise als:

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x) g(x) \, \mathrm{d}x$$

mit einem geeigneten Intervall $[a,\, b]$. Nun gilt für beliebige unitäre Räume (Skalarprodukträume), dass zwei Elemente x und y genau dann orthogonal sind, wenn $\langle x, y \rangle = 0$ ist. Zwei Funktionen f und g sind auf dem Intervall $[a, b]$ also dann orthogonal (stehen normal zueinander), wenn gilt:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) \, \mathrm{d}x = 0.$$

[2] Dass der Koeffizient a_0 mit dem willkürlichen Faktor $\frac{1}{2}$ versehen wurde, wird sich schon bald als Vereinfachung erweisen.

Beispiel: Die beiden Funktionen $f(x) = x$ und $g(x) = x^2$ sind auf dem Intervall $[-1, 1]$ orthogonal, denn es gilt

$$\langle x, x^2 \rangle = \int_{-1}^{1} x^3 \, \mathrm{d}x = \left. \frac{x^4}{4} \right|_{-1}^{1} = 0$$

Beispiel: Ebenso, und für uns viel wichtiger, sind $\sin x$ und $\cos x$ auf $[-\pi, \pi]$ orthogonal:

$$\langle \sin x, \cos x \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \, \cos x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(2x) \, \mathrm{d}x = - \left. \frac{\cos(2x)}{2} \right|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

Sinus und Cosinus stehen also in $[-\pi, \pi]$ normal aufeinander – eine zugegebenermaßen am Anfang befremdliche Vorstellung, die sich aber noch als sehr hilfreich erweisen wird.

Welche Bedeutung hat denn nun die Orthogonalität von Funktionen? Orientieren wir uns zunächst wieder an den Vektoren, deren Verhalten ja von den Elementen abstrakterer Räume imitiert werden soll. Ein Vektor $\boldsymbol{A}$ im dreidimensionalen Raum kann, wenn drei linear unabhängige Vektoren $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ gegeben sind, immer in der Form

$$\boldsymbol{A} = \alpha_1 \boldsymbol{e}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{e}_2 + \alpha_3 \boldsymbol{e}_3$$

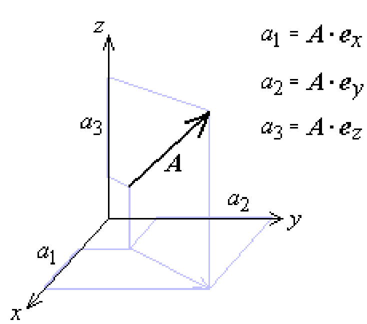
dargestellt werden. Im Allgemeinen kann es aber recht aufwendig sein, die Entwicklungskoeffizienten α_j zu ermitteln. Nehmen wir hingegen zusätzlich noch an, dass die Vektoren $\boldsymbol{e}_j$ orthogonal sind, also $\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = 0$ für $i \neq j$ ist, dann erhält man beispielsweise

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{e}_1 = (\alpha_1 \boldsymbol{e}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{e}_2 + \alpha_3 \boldsymbol{e}_3) \cdot \boldsymbol{e}_1 = \alpha_1 \underbrace{\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1}_{=|\boldsymbol{e}_1|^2} + \alpha_2 \underbrace{\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_1}_{=0} + \alpha_3 \underbrace{\boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_1}_{=0} = \alpha_1 |\boldsymbol{e}_1|^2,$$

und analog für $\boldsymbol{e}_2$ und $\boldsymbol{e}_3$; allgemein also

$$\alpha_j = \frac{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{e}_j}{|\boldsymbol{e}_j|^2}$$

Im besonders angenehmen Fall, dass die $\boldsymbol{e}_j$ sogar ein *Orthonormalsystem* bilden, also $\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}$ ist, gilt sogar $\alpha_j = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{e}_j$. Auf jeden Fall aber erhält man bei orthogonalen Vektoren Entwicklungskoeffizienten einfach durch Skalarproduktbildung.



10.3 Entwicklung nach dem trigonometrischen System

Unsere Idee ist es nun also, eine beliebige periodische Funktion f in eine Fourierreihe zu entwicklen, indem die entsprechenden Koeffizienten über Skalarprodukte mit trigonmetrischen Funktionen erhalten werden.

Das ist deswegen möglich, weil $\{1, \sin(nx), \cos(nx) \mid n \in \mathbb{N}\}$ ein vollständiges Orthogonalsystem bilden. Wie man ja leicht nachrechnen kann, ist

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x &= 0 \qquad \text{für } n, m \in \mathbb{N}_0 \\
\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n \\ \pi & \text{für } m = n \geq 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Für die Koeffizienten der Fourierreihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx).$$

erhält man also unmittelbar die Formeln

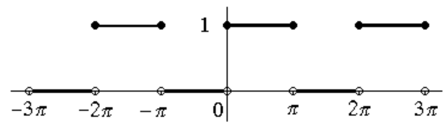
$$\boxed{\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,\mathrm{d}x \\
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,\cos(kx)\,\mathrm{d}x \\
b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,\sin(kx)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}}$$

für $k = 1, 2, 3, \ldots$. Um einen Koeffizienten b_0 braucht man sich natürlich nicht zu kümmern, da ja $\sin(0 \cdot x) = 0$ ist. Mit $\cos(0 \cdot x) = 1$ und $\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x = 2\pi$ wird auch klar, warum in der Fourierreihe ein $\frac{a_0}{2}$ auftaucht.

Nun ist es zwar gut, Entwicklungsformeln für die Koeffizienten zur Verfügung zu haben, damit ist aber noch auf keinen Fall gezeigt, dass die Fourierreihe tatsächlich konvergiert, und selbst wenn sie das tut, muss das im Prinzip keine Konvergenz gegen f sein. Diese Fragen ebenso wie die Diskussion einiger grundlegender Eigenschaften der Fourierreihen werden wir in den nächsten Abschnitt verlegen; hier beschäftigen wir uns noch ein wenig genauer mit der handwerklichen Ausführung der Integrationsausaufgabe.

Die obigen Integrationen für a_k und b_k kann man natürlich für ein allgemeines k ausführen und wird das auch tun, um nicht unendliche viele Integrale bestimmen zu müssen. Die so (meist durch partielle Integration) erhaltenen Formeln sind aber oft erst ab $k \geq k_0$ gültig. Zum Beispiel ist das der Fall, wenn die Koeffizienten Ausdrücke wie $\frac{1}{k-1}$ oder $\frac{1}{k^2-3k+2}$ enthalten, dann gelten sie erst ab $k = 2$ bzw. $k = 3$. Wenn so etwas passiert, muss man die Koeffizienten für alle k, für die die allgemeine Formel nicht anwendbar ist, separat rechnen.

Beispiel: Wir bestimmen die Fouriereihe der Rechtecksschwingung



$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } -\pi < x < 0 \\ 1 & \text{für } 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

mit $f(x \pm 2\pi) = f(x)$:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\pi} \mathrm{d}x = 1 \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,\cos(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\pi} \cos(kx)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \left. \frac{\sin(kx)}{k} \right|_0^{+\pi} = 0 \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,\sin(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\pi} \sin(kx)\mathrm{d}x = -\frac{1}{\pi} \left. \frac{\cos(kx)}{k} \right|_0^{+\pi} = \\ &= -\frac{1}{\pi} \frac{\cos(k\pi) - 1}{k} = -\frac{(-1)^k - 1}{k\pi} = \frac{1 - (-1)^k}{k\pi} \end{aligned}$$

Die Fourierreihe nimmt also die folgenden Gestalt an:

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^k}{k\pi} \sin(kx) = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)\pi} \sin((2n+1)x)$$

da ja die Koeffizienten b_k für gerade k verschwinden.

Es ist bei der Vereinfachung der Fourierkoeffizienten durchaus gut, einiges Wissen über die trigonmetrischen Funktionen im Hinterkopf zu haben, insbesondere ($k \in \mathbb{N}_0$):

$$\sin(k\pi) = 0, \qquad \cos(k\pi) = (-1)^k, \qquad \sin\left(\tfrac{2k+1}{2}\pi\right) = (-1)^k, \qquad \cos\left(\tfrac{2k+1}{2}\pi\right) = 0$$

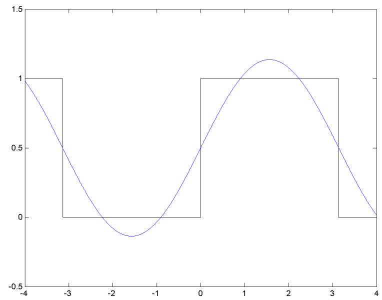
Ausdrück der Form $(-1)^k$ rufen natürlich noch nach Fallunterscheidungen, insbesondere dann, wenn sie dafür sorgen, dass ein Teil der Fourierkoeffizienten überhaupt zu Null wird.

Hat man es nun mit einer Funktion zu tun, die nicht π-, sondern $2L$-periodisch ist, so gibt es für die Formel der Fourierkoeffizienten nur minimale Modifikationen: Aus der Integration über das Intervall $[-\pi, \pi]$ wird eines über $[-L, L]$, um die richtige Periodizität der Winkelfunktion zu erhalten, wird x durch $\frac{\pi x}{L}$ ersetzt, und aus dem $\frac{1}{\pi}$ der Normierug wird ein $\frac{1}{L}$:

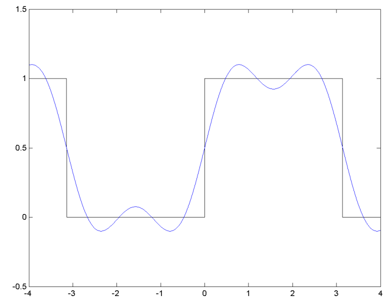
$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x)\,\mathrm{d}x \qquad a_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x)\,\cos\tfrac{k\pi x}{L}\,\mathrm{d}x \qquad b_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x)\,\sin\tfrac{k\pi x}{L}\,\mathrm{d}x$$

Natürlich läßt sich jede Periodenlänge auch durch simples Umskalieren auf die Länge 2π bringen; letztlich schlägt sich auch genau das in den allgemeinen Formeln für die Fourierkoeffizienten nieder.

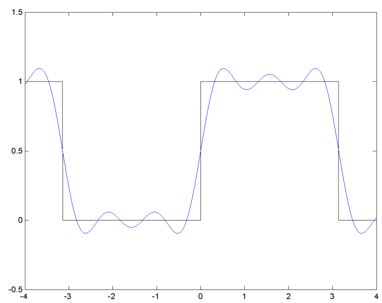
Als Demonstration für das Konvergenzverhalten einer Fourierreihe werden hier nun einige Partialsummen der Reihe aus dem vorangegangenen Beispiel (jeweils vor dem Hintergrund der Ausgangsfunktion) gezeigt:



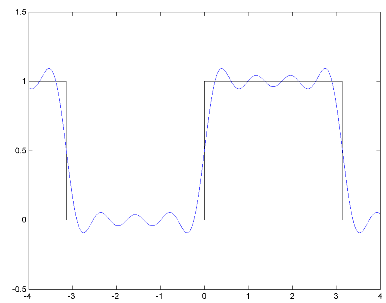
$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sin x$$



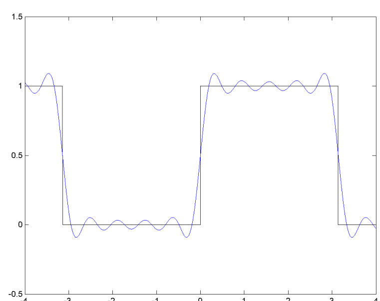
$$\frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{1} \frac{2\sin((2n+1)x)}{(2n+1)\pi}$$



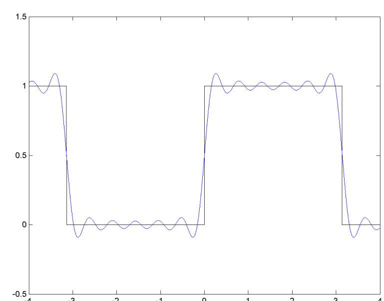
$$\frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{2} \frac{2\sin((2n+1)x)}{(2n+1)\pi}$$



$$\frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{3} \frac{2\sin((2n+1)x)}{(2n+1)\pi}$$



$$\frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{4} \frac{2\sin((2n+1)x)}{(2n+1)\pi}$$



$$\frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{5} \frac{2\sin((2n+1)x)}{(2n+1)\pi}$$

Der Eindruck, dass sich die Fourierreihe in der Nähe der Sprungstellen von f immer stärker zuspitzt, während überall sonst die Annäherung immer besser wird, ist übrigens gerechtfertigt. Der Ursprung dieser *Gibbs'schen Spitzen* ist bis heute nicht vollständig geklärt und weiterhin Gegenstand von Untersuchungen.

Letztendlich wird aber die Konvergenz auch in diesem Fall beliebig gut – abgesehen von den Sprungstellen selbst. Was dort genau passiert, das wird im nun folgenden Abschnitt zu klären sein.

10.4 Eigenschaften von Fourierreihen: ein Überblick

Die Ergebnisse über Fourierreihen sind meist ebenso weitreichend wie schwierig zu beweisen; von daher werden wir uns darauf beschränken, die wichtigsten Ergebnisse – meist ohne Beweis – zusammenzufassen und zu kommentieren:

Zunächst einmal schreibt man für die f zugeordnete Fourierreihe meist $f \sim \ldots$ und nicht $f = \ldots$, um damit anzudeuten, dass die Reihe die Funktion keineswegs (überall) darstellen muss. Als wichtigstes Kriterium für die Frage, unter welchen Voraussetzungen eine Fourierreihe erstens einmal überhaupt und dann auch noch gegen die richtige Funktion konvergiert, haben wir den folgenden zentralen Satz zur Verfügung:

Dirichlet'sche Regel

Es sei f eine auf $[-\pi, \pi]$ integrierbare Funktion, für die an jeder Stelle x die Grenzwerte

$$\begin{aligned} f(x-) &:= \lim_{h\to 0-} f(x+h) & f'_-(x) &:= \lim_{h\to 0-} \frac{f(x+h)-f(x-)}{h} \\ f(x+) &:= \lim_{h\to 0+} f(x+h) & f'_+(x) &:= \lim_{h\to 0+} \frac{f(x+h)-f(x+)}{h} \end{aligned}$$

existieren. Dann konvergiert die f zugeordnete Fourierreihe an jeder Stelle x gegen $\frac{1}{2}\left(f(x-)+f(x+)\right)$.

Das bedeutet insbesondere, dass die Fourierreihe an jeder Stelle x, an der f differenzierbar ist, gegen den Funktionswert $f(x)$ konvergiert. Generell liegt überall, wo f stetig ist und links- wie rechtsseitige Ableitung existieren, *punktweise* Konvergenz der Fourierreihe gegen f vor.[3]

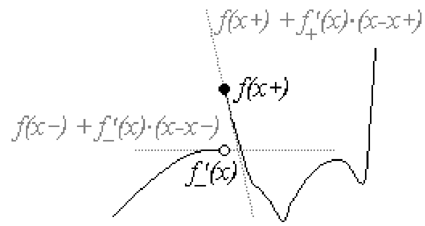
Man kann die Dirichlet'sche Regel übrigens auch für andere, allgemeinere Voraussetzungen formulieren. So genügt es für die Konvergenz an x gegen $\frac{1}{2}\left(f(x-)+f(x+)\right)$ zu fordern, dass f auf $[-\pi, \pi]$ von beschränkter Variation ist.

An Unstetigkeitsstellen zeigt die Fourierreihe ein bemerkenswert „unparteiisches“ Verhalten und konvergiert gegen das arithemtische Mittel von links- und rechtsseitigem Grenzwert. Welchen Wert f dabei genau an dieser Stelle hat, ist völlig belanglos.[4]

[3] *Gleichmäßige* Konvergenz hingegen können wir beim besten Willen nicht erwarten, denn eine Reihe stetiger Funktionen konvergiert gleichmäßig wieder gegen eine stetige Funktion. Bei der Fourierentwicklung wollen wir aber gerade eine fast beliebige, also u.U. auch höchst unstetige Funktion durch eine Reihe von Funktionen darstellen, die ausgesprochen starke analytische Eigenschaften haben – darunter eben auch Stetigkeit. Ist die zu entwickelnde Funktion f allerdings stetig, dann ist die Konvergenz sogar gleichmäßig.

[4] Überhaupt werden die Fourierkoeffizienten durch Integration bestimmt, und für den Wert eines Integrals spielen einzelne Punkte schon aus Prinzip keine Rolle. Demnach kann man eine Funktion an endlich vielen Punkten (sogar auf einer beliebigen Menge vom Maß Null) abändern, und sie wird immer noch die gleiche Fourierreihe haben.

Die obigen Forderungen bedeuten geometrisch, dass es an jeder Stelle zumindest einen links- und rechtsseitigen Funktionsgrenzwert geben muss und die entsprechenden Tangenten endliche Steigung haben müssen. An Stellen, an denen f differenzierbar ist, sind diese Bedingungen natürlich automatisch erfüllt.



Eine Aussage einerseits über die Güte der Approximition, anderseits über das allgemeine Aussehen der Fourierkoeffizienten machen die folgenden Sätze. Dabei bezeichnet

$$\|f\| := \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x}$$

die L^2-Norm von Funktionen. Sei nun f eine L^2-Funktion mit den Fourierkoeffizienten a_k und b_k. Allgemein nennen wir

$$t(x) := \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{n} \beta_k \sin(kx)$$

mit beliebigen α_k, $\beta_k \in \mathbb{R}$ ein *trigonometrisches Polynom* vom Grad n, und mit T_n wollen wir die Menge aller dieser Polynome bezeichnen. Dann zeichnet sich die n-te Partialsumme

$$s_n(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(kx)$$

der Fourierreihe von f (die natürlich auch $\in T_n$ ist) durch folgende Besonderheiten aus:

- s_n ist die beste Approximation an f in dem Sinne, dass für alle $t \in T_n$ gilt: $\|f - s_n\| \leq \|f - t\|$, und s_n ist sogar das einzige Element von T_n mit dieser Eigenschaft.

- $(f - s_n)$ ist orthonal zu T_n

- Es gilt die *Bessel'sche Gleichung*

$$\|f - s_n\| = \|f\|^2 - \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k^2 + b_k^2\right) \right]$$

  aus der wegen $\|f - s_n\| \geq 0$ die Bessel'sche Ungleichung $\|f\|^2 \geq \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k^2 + b_k^2\right) \right]$ wird, und wegen $\|f - s_n\| \to 0$ schließlich die *Parseval'sche Gleichung*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^2 + b_k^2\right) = \frac{1}{\pi} \|f\|^2$$

Aus den letzten (Un)gleichungen folgt unmittelbar, dass die Reihe über die Quadrate der Fourierkoeffizienten beschränkt bleiben muss (sofern f quadratintegrabel ist, wovon wir ausgehen wollen), dass also a_k und b_k „schnell genug“ gegen Null gehen müssen.

Kennt man eine Funktion, so kennt man auch ihre Fourierkoeffizienten; es gilt aber auch in gewisser Weise die Umkehrung: Kennt man die Fourierkoeffizienten einer Funktion, so kennt man auch die Funktion selbst – fast überall, also überall außer auf eine Menge vom Maß Null. Stetige Funktionen werden durch ihre Fourierkoeffizienten sogar eindeutig festgelegt.

10.5 Symmetrien; Fourier-Sinus- und -Cosinus-Reihen

Wir betrachten nun wieder konkret die Entwicklung einer 2π-periodischen Funktion f in eine Fourierreihe von einem sehr handwerklichen Standpunkt aus:

Wenn f auf $[-\pi, \pi]$ gerade ist, dann werden alle Koeffizienten b_k verschwinden, denn dann ist das Produkt von f mit $\sin(kx)$ ungerade und wird Null bei Integration über ein symmetrisches Intervall. Außerdem gilt dann aus Symmetriegründen:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x \qquad a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x)\,\cos(kx)\,\mathrm{d}x$$

Analoges gibt es natürlich auch für ungerade Funktionen: Alle Koeffizienten a_k werden Null und für die b_k erhält man:

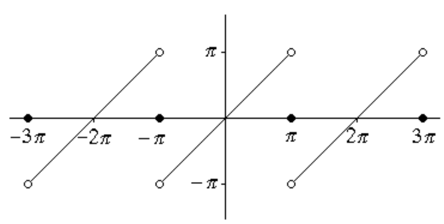
$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x)\,\sin(kx)\,\mathrm{d}x$$

Der Wegfall eines Teils der Koeffizienten und die Einschränkung des Integrationsintervalls bedeuten meist eine so große Vereinfachung des Problems, dass es sich oft auszahlt, die zu entwickelnde Funktion durch Verschiebung in eine entsprechend (anti)symmetrische Form zu bringen.

Beispiel: Wir bestimmen die Fourierreihe einer *Sägezahnschwingung*, also einer Funktion der Form

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{für } -\pi < x < \pi \\ 0 & \text{für } x = \pm\pi \end{cases}$$

mit $f(x \pm 2\pi) = f(x)$



Diese Funktion ist rein antisymmetrisch, damit wissen wir, dass die Koeffizienten a_k alle verschwinden und für die b_ks gilt:

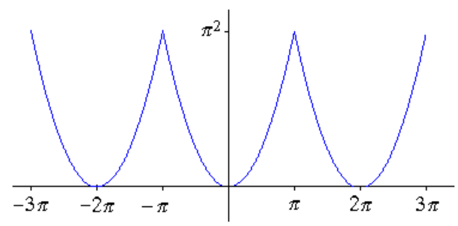
$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\,\sin(kx)\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = x & v' = \sin(kx) \\ u' = 1 & v = -\frac{1}{k}\cos(kx) \end{array} \right| = \\ &= \frac{2}{\pi}\left\{ -\frac{1}{k} x\cos(kx)\Big|_0^\pi + \frac{1}{k}\int_0^\pi \cos(kx)\,\mathrm{d}x \right\} = \\ &= \frac{2}{\pi}\left\{ -\frac{1}{k}\pi\cos(k\pi) + \frac{1}{k}^2 \sin(kx)\big|_0^\pi \right\} = -\frac{2}{k}(-1)^k = \frac{2}{k}(-1)^{k+1} \end{aligned}$$

Die Fourierreihe hat also die Gestalt

$$f(x) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin(kx)$$

Beispiel: Wir untersuchen nun die Funktion

$$f(x) = x^2 \quad \text{für } -\pi < x \le \pi$$



mit $f(x \pm 2\pi) = f(x)$. Diese Funktion ist gerade und wir benötigen daher nur die Koeffizienten a_k:

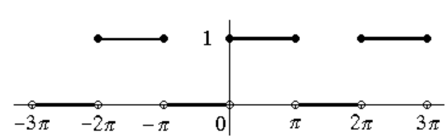
$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\,\frac{x^3}{3}\Big|_0^\pi = \frac{2\pi^2}{3} \\ a_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\,\cos(kx)\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = x^2 & v' = \cos(kx) \\ u' = 2x & v = \frac{1}{k}\sin(kx) \end{array} \right| = \\ &= \frac{2}{\pi}\left\{ \underbrace{\frac{1}{k}\,x\,\sin(kx)\Big|_0^\pi}_{=0} - \frac{2}{k}\int_0^\pi x\,\sin(kx)\,\mathrm{d}x \right\} = \left| \begin{array}{ll} u = x & v' = \sin(kx) \\ u' = 1 & v = -\frac{1}{k}\cos(kx) \end{array} \right| = \\ &= \frac{4}{k\pi}\left\{ \frac{1}{k}\,x\,\cos(kx)\Big|_0^\pi - \underbrace{\frac{1}{k}\int_0^\pi \cos(kx)\,\mathrm{d}x}_{=\frac{1}{k^2}\sin(kx)\big|_0^\pi = 0} \right\} = \frac{4}{k^2\pi}\pi\cos(k\pi) = 4\frac{(-1)^k}{k^2} \end{aligned}$$

Es gilt also die Fourierdarstellung

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos(kx)$$

Beispiel: Wir betrachten nun nochmals Rechteckssschwingung

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } -\pi < x < 0 \\ 1 & \text{für } 0 \le x \le \pi \end{cases}$$



mit $f(x \pm 2\pi) = f(x)$:

Diese Funktion ist weder symmetrisch noch antisymmetrisch. Geht man aber zu g mit $g(x) := f(x) - \frac{1}{2}$ über, verschiebt f also um $\frac{1}{2}$ nach unten, so erhält man eine rein antisymmetrische Funktion. Die Koeffizienten a_k verschwinden also und man erhält:

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi g(x)\,\sin(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(kx)\mathrm{d}x = -\frac{1}{\pi}\,\frac{\cos(kx)}{k}\bigg|_0^{+\pi} = \\ &= -\frac{1}{\pi}\frac{\cos(k\pi)-1}{k} = -\frac{(-1)^k-1}{k\pi} = \frac{1-(-1)^k}{k\pi} = \begin{cases} 0 & \text{für } k = 2n \\ 2 & \text{für } k = 2n+1 \end{cases} \end{aligned}$$

Man gelangt also deutlich schneller zu

$$f(x) = \frac{1}{2} + g(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)\pi}\sin((2n+1)x)$$

Oft hat man es aber mit dem Fall zu tun (wie etwa bei der Saitenschwingungsgleichung), dass eine Funktion nicht auf einem Intervall $[_L, L]$, sondern nur auf $(0, L)$ vorgegeben ist. Hier hat man nun (im Prinzip) verschiedene Möglichkeit, diese Funktion in eine Fourierreihe zu entwickeln:

- Man setzt $f(x) \equiv 0$ für alle $x \in [-L, L]$ und entwickelt dann „ganz klassisch“ in eine Fourierreihe, die üblicherweise Sinus- und Cosinusterme enthalten wird. (Diese bezeichnen wir in diesem Abschnitt mit $\mathrm{FR}(f)$.)
- Man denkt sich die Funktion *ungerade* fortgesetzt und entwickelt sie gemäß

  $$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,\sin(kx)\,\mathrm{d}x$$

  in eine reine *Fourier-Sinus-Reihe*, die wir hier mit $\mathrm{FSR}(f)$ bezeichnen wollen.[5]
- Genausogut kann man sich f aber auch gerade fortgesetzt denken und gemäß

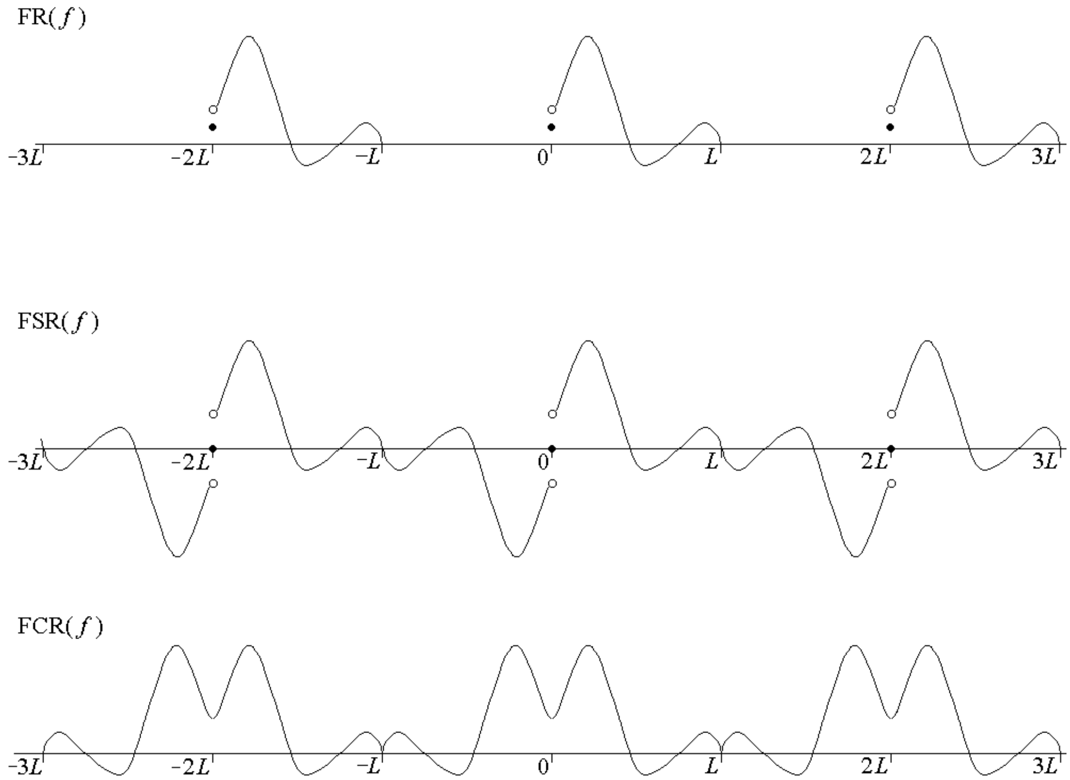
  $$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x \qquad a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,\cos(kx)\,\mathrm{d}x$$

  in eine *Fourier-Cosinus-Reihe*, $\mathrm{FCR}(f)$, entwickeln.

Diese Entwicklungen sind im Folgenden illustriert, für sie gilt der Zusammenhang

$$\mathrm{FR}(f) = \frac{1}{2}\big(\mathrm{FSR}(f) + \mathrm{FCR}(f)\big)$$

[5] Diese Möglichkeit hat man strenggenommen nicht mehr, wenn f sogar auf dem *abgeschlossenen* Intervall $[0, L]$ vorgegeben ist und nicht $f(0) = f(L) = 0$ gilt.



BEISPIEL: Wir entwickeln die auf $(0,\pi)$ gegebene Funktion

$$f(x) = x\,(\pi - x) = \pi\, x - x^2$$

in eine Fourier-Sinus- und eine -Cosinus-Reihe. (Die FR-Entwicklung ist dann einfach das arithmetische Mittel dieser beiden Entwicklungen.) Also haben wir einerseits:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left(\pi\, x - x^2\right)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\pi\, x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^\pi = \frac{\pi^3}{6} \\ a_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left(\pi\, x - x^2\right)\,\cos(kx)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

andererseits

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left(\pi\, x - x^2\right)\,\sin(kx)\,\mathrm{d}x$$

Das vorangegangene Beispiel lehrt: Auch wenn alle drei Entwicklungen möglich sind, können sie doch drastisch verschieden schnell konvergieren. Welche Entwicklung also die günstigste ist, muss man von Fall zu Fall klären.

10.6 Ergänzungen

10.6.1 Summenformeln

Eine der vielen Anwendungen von Fourierreihen ist die Möglichkeit, auf elegante Weise höchst reizvolle Summenformeln für unendliche Reihen zu erhalten.

Dazu benutzt man die Fourierreihen bestimmter Funktionen, deren Fourierreihe auf jeden Fall konvergiert. Setzt man in diese Identitäten dann spezielle Werte für x ein, so erhält man Gleichungen für Zahlenreihen – darunter Ergebnisse, die man sonst nur mit sehr viel Aufwand (wenn überhaupt) erhalten würde.

So gilt nach dem zweiten Beispiel in 2.5 für alle $x \in [-\pi, \pi]$ die Identität

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos(kx)$$

Setzt man nun $x = 0$ bzw. $x = \pi$ ein, so erhält man

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\pi^2}{3} - 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \underbrace{\cos(0)}_{=1} \\ \pi^2 &= \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \underbrace{(-1)^k \cos(k\pi)}_{=(-1)^k\cdot(-1)^k=1} \end{aligned}$$

und nach Umformung

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}}$$

Doch auch andere Reihen können interessante Ergebnisse liefern:

Beispiel: Wir kennen für die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{für } -\pi < x < \pi \\ 0 & \text{für } x = \pm\pi \end{cases} \qquad f(x \pm 2\pi) = f(x)$$

bereits die Fourierdarstellung

$$f(x) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx)$$

Nun setzen wir in diese Gleichung $x = \frac{\pi}{2}$ ein und erhalten:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \equiv 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \ldots = \frac{\pi}{4}$$

Eine Schwäche dieses Verfahrens ist es natürlich, dass man nicht einfach zu einer gegebenen Reihe den Wert bestimmen kann, sondern zuerst eine Fourierreihe von der entsprechenden Gestalt braucht.

10.6.2 Komplexe Fourierreihen

Bisher haben wir Fourierreihen nur rein reell gesehen. In Hinblick auf die Eulersche Formel

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

könnte man aber hoffen, dass sich Fourierreihen auch in komplexer Form – und das vielleicht sogar einfacher – schreiben lassen. Dies ist tatsächlich so, und man erhält unmittelbar

$$f \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

als gleichwertige komplexe Darstellung der Fourierreihe von f. Die Koeffizienten sind dabei über

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} f(x)\,\mathrm{d}x$$

bestimmt, denn für komplexwertige Funktionen wird das Skalarprodukt als $\langle f,\, g\rangle := \int_a^b \bar{f}(x)\, g(x)\,\mathrm{d}x$ definiert, und es ist

$$\left\langle e^{ikx},\, e^{ikx} \right\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx}\, e^{ikx}\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi$$

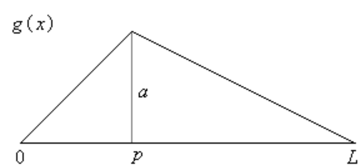
Zwischen den Koeffizienten a_k, b_k einerseits und den (im allgemeinen komplexwertigen) c_k andererseits besteht, wie man leicht nachrechnen kann, natürlich ein Zusammenhang:

$$a_k = c_k + c_{-k} \qquad b_k = ic_k - ic_{-k}$$

10.6.3 Die gezupfte Saite

Wir kehren nun noch einmal zur Saitenschwingungsgleichung zurück und lösen dabei ein typisches Problem, jenes der *gezupften Saite*. Wir betrachten also den Fall, dass die Saite an einer Stelle $p \in (0, L)$ eine Anfangsauslenkung a erhält, aber keine Startgeschwindigkeit. Damit lauten die Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned} u(x,0) &= g(x) = \begin{cases} \frac{a}{p} x & 0 \le x \le p \\ \frac{a}{L-p}(L-x) & p < x \le L \end{cases} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= h(x) \equiv 0 \end{aligned}$$



Für die Rechnung benötigen wir mehrfach das unbestimmte Integral

$$\int x \sin \frac{k\pi x}{L}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} u = x & v' = \sin \frac{k\pi x}{L} \\ u' = 1 & v = -\frac{L}{k\pi} \cos \frac{k\pi x}{L} \end{matrix} \right| = \left(\frac{L}{k\pi}\right)^2 \sin \frac{k\pi x}{L} - \frac{L}{k\pi}\, x \cos \frac{k\pi x}{L}$$

Nun erhält man

$$A_k = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\,\sin\frac{k\pi x}{L}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{L}\,\{I_1 + I_2\}$$

mit den Integralen

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{a}{p}\int_0^p x\,\sin\frac{k\pi x}{L}\,\mathrm{d}x = \frac{a}{p}\left[\left(\frac{L}{k\pi}\right)^2 \sin\frac{k\pi x}{L} - \frac{L}{k\pi}\,x\,\cos\frac{k\pi x}{L}\right]_0^p = \\
&= \frac{a}{p}\left(\frac{L}{k\pi}\right)^2 \sin\frac{k\pi p}{L} - a\frac{L}{k\pi}\,\cos\frac{k\pi p}{L} \\
I_2 &= \frac{a}{L-p}\left\{L\int_p^L \sin\frac{k\pi x}{L}\,\mathrm{d}x - \int_p^L x\,\sin\frac{k\pi x}{L}\,\mathrm{d}x\right\} = \\
&= -\frac{aL}{L-p}\frac{L}{k\pi}\,\cos\frac{k\pi x}{L}\bigg|_p^L - \frac{a}{L-p}\left[\left(\frac{L}{k\pi}\right)^2 \sin\frac{k\pi x}{L} - \frac{L}{k\pi}\,x\,\cos\frac{k\pi x}{L}\right]_p^L = \\
&= \frac{aL}{L-p}\frac{L}{k\pi}\cos\frac{k\pi p}{L} - \frac{aL}{L-p}\frac{L}{k\pi}\cos(k\pi) - \frac{a}{L-p}\left(\frac{L}{k\pi}\right)^2 \sin(k\pi) + \\
&\quad + \frac{a}{L-p}\frac{L}{k\pi}\,L\,\cos(k\pi) + \frac{a}{L-p}\left(\frac{L}{k\pi}\right)^2 \sin\frac{k\pi p}{L} - \frac{a}{L-p}\frac{L}{k\pi}\,p\,\cos\frac{k\pi p}{L} = \\
&= a\frac{L}{k\pi}\,\cos\frac{k\pi p}{L} + \frac{a}{L-p}\left(\frac{L}{k\pi}\right)^2 \sin\frac{k\pi p}{L}
\end{aligned}$$

Die Koeffizienten A_k ergeben sich damit zu

$$A_k = \left\{\frac{a}{p} + \frac{a}{L-p}\right\}\left(\frac{L}{k\pi}\right)^2 \sin\frac{k\pi p}{L} = \frac{aL}{p(L-p)}\left(\frac{L}{k\pi}\right)^2 \sin\frac{k\pi p}{L}$$

Ein anderes häufiges Problem ist jenes der *geschlagenen* Saite, bei der es zwar keine Anfangsauslenkung gibt, wohl aber eine Anfangsgeschwindigkeit $h(x) \not\equiv 0$. In diesem Fall sind die Koeffizienten A_k alle gleich Null und die B_k sind durch eine Entwicklung nach Sinusfunktionen gegeben.

Im allgemeinen Fall werden natürlich sowohl eine Anfangsauslenkung $g(x)$ als auch eine Anfangsgeschwindigkeit $h(x)$ gegeben sein. Da die Koeffizienten A_k aber nur durch die $g(x)$, die B_ks hingegen nur durch $h(x)$ festgelegt sind, können auch dann, wenn beides vorgegeben ist, die beiden Probleme jeweils getrennt gelöst und dann wieder kombiniert werden. Der Grund dafür liegt letztendlich in der *Linearität* der Saitenschwingungsgleichung.

10.7 Ausblick

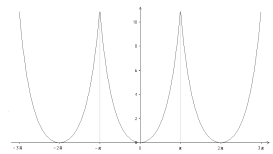
Das Konzept der Fourierreihen läßt sich auf zwei Arten erweitern (die manchmal auch noch miteinander kombiniert werden können):

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx}$$

10.8 Gelöste Musterbeispiele

$f(x)$ sei auf $(-\pi, +\pi]$ durch $f(x) := \cosh x - 1$ definiert und 2π-periodisch fortgesetzt. 1.) Man skizziere f im Intervall $[-3\pi, 3\pi]$, 2.) Man berechne die Fourierreihe von f. 3.) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert diese Fourierreihe gegen $f(x)$?

1. Für f erhält man in $(-\pi, +\pi]$:



2. Da f gerade ist, sind alle Koeffizienten $b_\nu = 0$, weiters ist

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\cosh x - 1)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\sinh x - x\right]_0^\pi = \frac{2}{\pi}\sinh\pi - 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{a_0}{2} = \frac{1}{\pi}\sinh\pi - 1$$

Das Integral für a_k löst man am einfachsten mittels partieller Integration:

$$\begin{aligned} I &= \int \cosh x \cdot \cos \nu x\,dx = \left| \begin{array}{ll} u' = \cosh x & u = \sinh x \\ v = \cos\nu x & v' = -\nu\sin\nu x \end{array} \right| = \\ &= \sinh x \cdot \cos\nu x + \nu \int \sinh x \cdot \sin\nu x\,dx = \left| \begin{array}{ll} u' = \sinh x & u = \cosh x \\ v = \sin\nu x & v' = \nu\cos\nu x \end{array} \right| = \\ &= \sinh x \cdot \cos\nu x + \nu\cosh x \cdot \sin\nu x - \nu^2 \int \cosh x \cdot \cos\nu x\,dx \\ \to \quad & \int \cosh x \cdot \cos\nu x\,dx = \frac{1}{1+\nu^2}\left(\sinh x \cdot \cos\nu x + \nu\cosh x \cdot \sin\nu x\right) \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} a_\nu &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cosh x \cdot \cos\nu x\,dx = \frac{2}{\pi(1+\nu^2)}\Big[\sinh x \cdot \cos\nu x + \nu\cosh x \cdot \sin\nu x\Big]_0^\pi \\ &= \frac{2}{\pi(1+\nu^2)}\sinh\pi \cdot \cos\nu\pi = \frac{2\cdot(-1)^\nu}{\pi(1+\nu^2)}\sinh\pi \end{aligned}$$

und letztendlich

$$f(x) \sim \frac{1}{\pi}\sinh\pi - 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2\cdot(-1)^\nu}{\pi(1+\nu^2)}\sinh\pi \cdot \cos\nu x$$

3. Diese Reihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ gegen f, da f stetig ist und f'_+ und f'_- überall existieren.

Man entwickle die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } -\pi \le x < -\frac{\pi}{2} \\ x + \frac{\pi}{2} & \text{für } -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{für } \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases} \qquad f(x \pm 2\pi) = f(x)$$

in eine Fourierreihe.

Da die Funktion im relevanten Intervall $[-\pi, \pi]$ nur für $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ ungleich Null ist, muss man auch nur über diese Bereich integrieren. (Man beachte dabei, dass einige Integrale wie etwa $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin x \, \mathrm{d}x$ oder $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x \cos x \, \mathrm{d}x$ aus Symmetriegründen verschwinden, und sich Ausdrücke durch Relationen wie $\cos(-x) = \cos x$ deutlich vereinfachen.)

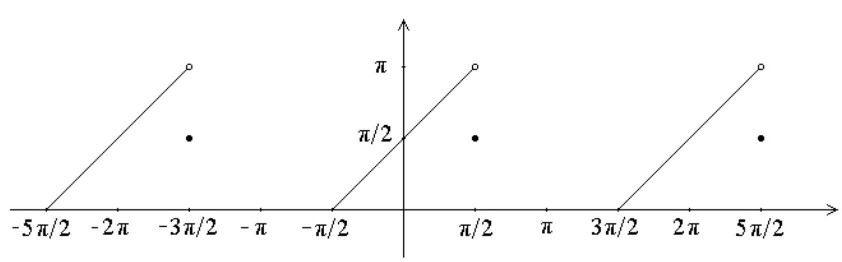
$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x\,dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2} \\
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\cos(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x\cos(kx)\,dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos(kx)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\,\frac{\sin(kx)}{k}\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{2k}\left(\sin\frac{k\pi}{2} - \sin(-\frac{k\pi}{2})\right) = \frac{\sin\frac{k\pi}{2}}{k} \\
b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\sin(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x\sin(kx)\,dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin(kx)\,dx = \\
&= \left|\begin{array}{ll} u = x & v' = \sin(kx) \\ u' = 1 & v = -\frac{1}{k}\cos(kx) \end{array}\right| = b_k = \frac{1}{\pi}\left[-x\frac{\cos(kx)}{k} + \frac{\sin(kx)}{k^2}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = -\frac{1}{k}\cos\frac{k\pi}{2} + \frac{2}{k^2\pi}\sin\frac{k\pi}{2}
\end{aligned}$$

Nun geht es noch darum, die Koeffizienten zu vereinfachen:

$$a_{2n} = 0, \quad a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{2n+1}, \quad b_{2n} = \frac{(-1)^{n+1}}{2n}, \quad b_{2n+1} = \frac{2(-1)^n}{(2n+1)^2\pi}$$

und damit ergibt sich die Fourierreihe zu

$$f \sim \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\cos((2n+1)x) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n}\sin(2nx) + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{(2n+1)^2\pi}\sin((2n+1)x)$$



10.9 Aufgaben, Fragen, Beispiele

10.9.1 Übungsaufgaben

1. Bestimmen Sie die Fourierreihe der Funktion

$$f(x) = |\sin x| \quad \text{für } x \in (-\pi, \pi], \qquad f(x \pm \pi) = f(x)$$

2. Bestimmen Sie die Fourierreihe der Funktion

$$f(x) = |x| \quad \text{für } x \in (-\pi, \pi], \qquad f(x \pm \pi) = f(x)$$

10.9.2 Verständnisfragen

1. Ändern sich die Fourierkoeffizienten einer Funktion, wenn diese an endlich vielen Stellen abgeändert wird?

10.9.3 Ergänzungsbeispiele

1. Leiten Sie für die komplexe Fourierreihendarstellung

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$$

die in 2.6.2 angegebene Beziehung zwischen den Koeffizienten a_k und b_k her.