1 Analysis T1 – Übungsblatt 1

An einer Weggabelung in der Wüste leben zwei Brüder, die vollkommen gleich aussehen, zwischen denen es aber einen gewaltigen Unterschied gibt: Der eine sagt immer die Wahrheit, der andere lügt immer. Schon halb verdurstet kommt man zu dieser Weggabelung und weiß genau: Einer der beiden Wege führt zu einer Oase, der andere hingegen immer tiefer in die Wüste hinein. Man darf aber nur einem der Brüder (man weiß nicht, welcher es ist) genau eine Frage stellen. Was muß man fragen, um sicher den Weg zur Oase zu finden?

*Beweisen Sie die Abtrennregel (*modus ponens*):* $\boxed{(A \wedge (A \to B)) \to B}$

Beweisen Sie die Äquivalenzen $(A \vee B) \;\Leftrightarrow\; \neg(\neg A \wedge \neg B)$ *und* $(A \wedge B) \;\Leftrightarrow\; \neg(\neg A \vee \neg B)$.

Sie haben einen Satz Karten, jeweils mit einem Buchstaben auf der einen und einer Zahl auf der anderen Seite. Wie viele und welche der rechts dargestellten Karten müssen Sie mindestens umdrehen, um die Aussage „Wenn auf einer Seite einer Karte ein Vokal ist, dann ist auf der anderen Seite eine gerade Zahl" zu überprüfen?

A	**Z**	**7**	**8**

Diskutieren sie a) die Aussage des Kreters Epimenides „Alle Kreter sind Lügner", b) die Aussage „Diese Aussage ist falsch". Wo liegt ein echtes, wo nur ein scheinbares Paradoxon vor und wie läßt sich zweiteres auflösen?

Man löse die folgenden Gleichungen nach x auf:
a) $\dfrac{x+1}{x} = a,$ *b)* $\dfrac{x+1}{3x-7} = 2,$ *c)* $4 + \dfrac{1}{4+\frac{1}{x}} = a,$ *d)* $\dfrac{x}{x+1} + \dfrac{2}{x-1} = 1$

Man finde alle reellen Lösungen x der folgenden Gleichungen:
a) $x^3 - 2x^2 - 3x = 0,$ *b)* $x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x = 0,$ *c)* $x^2 + 10 = 6x.$

Gegeben sind die drei Mengen $M_1 = \{a, b, c, d, e\}$, $M_2 = \{e, f, g, h, i\}$ *und* $M_3 = \{a, c, e, g, i\}$. *Man bilde die Mengen* $M_1 \cap M_2$, $M_1 \cup M_2$, $M_1 \cap M_3$, $M_1 \cup M_3$, $M_2 \cap M_3$ *und* $M_2 \cup M_3$ *sowie* $M_1 \setminus M_2$, $M_2 \setminus M_1$, $M_1 \setminus M_3$, $M_2 \setminus M_3$, $\bigcap_{n=1}^{3} M_n$ *und* $\bigcup_{n=1}^{3} M_n$

Beweisen Sie die Absorptionsgesetze $M_1 \cap (M_1 \cup M_2) = M_1$ *und* $M_1 \cup (M_1 \cap M_2) = M_1$*!*

Anmerkung: Die Übungsblätter zur Analysis T1 dient allein Ihrer Übung und Selbstkontrolle; ein Rechnen der Beispiele hat keinen (direkten) Einfluss auf Ihre Endnote. Die Beispiele werden später zum Teil im Tutorium Analysis T1 vorgerechnet; teilweise werden auch Lösungen ausgeteilt bzw. finden sich im Internet unter

http://www.cis.tugraz.at/matd/de/heersink/an1_unt.html

2 Analysis T1 – Übungsblatt 2

Man bestimme alle $x \in \mathbb{R}$*, für die gilt:* $|x+5| - x - 9 < 0$

Man bestimme alle reellen x*, für die gilt:* $|x-2| + \frac{2}{x} + |x+2| > 0$

Man bestimme alle $x \in \mathbb{R}$*, für die gilt:* $\frac{|x-2| \cdot (x+2)}{x} < |x|$

Man beweise die kleine Schwarzsche Ungleichung $|a_1 b_1 + a_2 b_2| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$.

(*) $\mathbb{K}$ *sei ein Körper. Beweisen Sie, daß das kartesische Produkt* $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$ *mit den Operationen* $(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$ *und* $(a,b) \cdot (c,d) = (ac + \lambda bd, ad + bc)$ *einen Körper bildet, sofern* $x^2 \neq \lambda$ *für alle* $x \in \mathbb{K}$*!*

Man beweise durch vollständige Induktion: $\sum_{k=1}^{n} (k-1)^2 < \frac{n^3}{3}$ *für alle natürlichen* n.

(*) Man beweise für natürliche Zahlen $n \geq 2$*:* $\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{2}{k\,(k+1)}\right) = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{n}\right)$

Man zeige für $n \in \mathbb{N}$*:* $\sum_{k=0}^{n-1} (n+k)\,(n-k) = \frac{n\,(n+1)\,(4n-1)}{6}$

Man beweise, dass $5^n - 1$ *durch* 4 *teilbar ist.*

Man beweise für alle $n \in \mathbb{N}$ *die Formel* $\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k = 2 + 2^{n+1}(n-1)$.

Scheitert der Beweis von „$2n+1$ *ist gerade für alle* $n \geq 100$ *am Induktionsanfang, am Induktionsschritt oder an beidem?*

Finden Sie selbst ein Beispiel für eine Aussageform $A(n)$*, die für alle* $n \in \mathbb{N}$ *falsch ist, für die sich der Schluß* $n \to n+1$ *aber durchführen läßt.*

Anmerkung: Die Übungsblätter zur Analysis T1 dient allein Ihrer Übung und Selbstkontrolle; ein Rechnen der Beispiele hat keinen (direkten) Einfluss auf Ihre Endnote. Die Beispiele werden später zum Teil im Tutorium Analysis T1 vorgerechnet; teilweise werden auch Lösungen ausgeteilt bzw. finden sich im Internet unter

http://www.cis.tugraz.at/matd/de/heersink/an1_unt.html

Beispiele, die mit einem (*) markiert sind, sind schwieriger und als Ergänzung für jene zu verstehen, die sich intensiver mit dem Stoff beschäftigen wollen.

3 Analysis T1 – Übungsblatt 3

Man berechne den Grenzwert der Folge $a_n = n - n \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n}}$.

Man berechne den Grenzwert der Folge $a_n = \dfrac{\sqrt{4n(n-2)} - \sqrt{2n(n-1)}}{\sqrt{3n(n+3)}}$.

Man untersuche die Folgen $a_n = (-1)^n \sqrt{n} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$ *und* $b_n = \dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n+2} - \dfrac{n}{2}$ *auf Konvergenz und berechne gegebenenfalls die Grenzwerte.*

Man berechne den Grenzwert der Folge $a_n = \dfrac{2+4+6+\ldots+2n}{1+3+5+\ldots+(2n-1)}$.

Man berechne den Grenzwert der Folge $a_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n}$.

(*) Gegeben ist $a_n = \left(\dfrac{2n}{3n+1}\right)^{(-1)^n} + \dfrac{(-1)^n\, n}{2(n+1)} - \dfrac{1}{2}$. *Man bestimme* $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ *und* $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

(*) Man zeige, daß die Folge $a_n = \frac{(n+a)^n\, a^n}{n^n \cdot n!}$ *für jede reelle Zahl a konvergiert und bestimme den Grenzwert.*

$\{a_n\}$ *ist definiert durch* $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$. *Man beweise:* $\left(\frac{3}{2}\right)^n \leq a_n \leq 2^n$

Man untersuche $a_{n+1} = 1 + \sqrt{1+a_n}$, $a_1 = 0$ *auf Konvergenz und bestimme ggf. den Limes.*

Man untersuche $a_{n+1} = a_n^2 + a_n$, $a_1 = \frac{1}{4}$ *auf Konvergenz und bestimme ggf. den Grenzwert.*

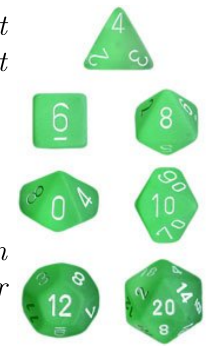
(*) Gegeben ist die Folge $a_{n+1} = 2a_n - 1$ *mit* $a_1 = a \in \mathbb{R}$. *Man bestimme ein explizites Bildungsgesetz für die Folgenglieder und untersuche, für welche* $a \in \mathbb{R}$ *die Folge konvergiert.*

Anmerkung: Die Übungsblätter zur Analysis T1 dient allein Ihrer Übung und Selbstkontrolle; ein Rechnen der Beispiele hat keinen (direkten) Einfluss auf Ihre Endnote. Die Beispiele werden später zum Teil im Tutorium Analysis T1 vorgerechnet; teilweise werden auch Lösungen ausgeteilt bzw. finden sich im Internet unter

http://www.cis.tugraz.at/matd/de/heersink/an1_unt.html

Beispiele, die mit einem (*) markiert sind, sind schwieriger und als Ergänzung für jene zu verstehen, die sich intensiver mit dem Stoff beschäftigen wollen.

4 Analysis T1 – Übungsblatt 4



(*) Der Erwartungswert einer Größe ist die Summe aller Möglichkeiten gewichtet mit jeweils der Wahrscheinlichkeit für ihr Eintreten. So ist der Erwartungswert eines (fairen) n-seitigen Würfels

$$\langle W_n \rangle = \frac{1}{n}\,(1+2+\ldots+n) = \frac{1}{n}\,\frac{n\,(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$$

Berechnen Sie, wie sich dieser Wert durch die Zusatzregel ändert, dass beim Würfeln der höchsten Zahl n jeweils weitergewürfelt und das Ergebnis immer zum bisherigen addiert wird.

Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^{n-1}}$, *b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+n^2}$, *c)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} 2^{-3n-1}$

Man untersuche die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n+3)}{n\,!}$ *auf Konvergenz.*

Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin\sqrt{n}}{n^{5/2}}$, *b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3}$, *c*)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln\sqrt{n}}{n^{5/4}}$

Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cdot(\sqrt{n}+1)}{n^2+5n-1}$, *b*)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{n}\right)^n$, *c*)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\left(\pi\cdot\left(n+\frac{4}{n}\right)\right)$

Man untersuche die Reihen $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]$ *und* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \binom{4n}{3n}^{-1}$ *auf Konvergenz.*

Man bestimme alle $x \in (-\pi,\pi)$*, für die die Reihe* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sin 2x)^n$ *konvergiert.*

Anmerkung: Die Übungsblätter zur Analysis T1 dient allein Ihrer Übung und Selbstkontrolle; ein Rechnen der Beispiele hat keinen (direkten) Einfluss auf Ihre Endnote. Die Beispiele werden später zum Teil im Tutorium Analysis T1 vorgerechnet; teilweise werden auch Lösungen ausgeteilt bzw. finden sich im Internet unter

http://www.cis.tugraz.at/matd/de/heersink/an1_unt.html

Beispiele, die mit einem (*) markiert sind, sind schwieriger oder gehen über den (bisher behandelten) Stoff der Analysis hinaus.

5 Analysis T1 – Übungsblatt 5

Gegeben sind die beiden Funktionen f und g:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5 & -3 \le x < -2 \\ x + 1 & -2 \le x < 0 \\ 2x & 0 \le x < 1 \\ 1 & x = 1 \\ x^2 + 1 & 1 < x \le 2 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \dfrac{|x+2|}{x+2} & -3 \le x < -1;\ x \ne -2 \\ 2 + x & -1 \le x < 1 \\ x^2 + |x| + 1 & 1 \le x < 2 \\ 9 - x & 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

mit den Definitionsbereichen $D_f = [-3, 2]$ und $D_g = [-3, 3] \setminus \{-2\}$. Man überprüfe beide Funktionen auf Stetigkeit und skizziere ihre Graphen.

Man berechne die erste Ableitung f' der folgenden Funktionen:

1) $f(x) = e^{ax^2+bx+c}$ *2)* $f(x) = \ln \dfrac{1}{1+x^2}$ *3)* $f(x) = x^2 e^{-x}$

4) $f(x) = \dfrac{\cosh x}{x^2 + 3x + 1}$ *5)* $f(x) = \arcsin(ax + b)$ *6)* $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2 + 2x + 1}$

Man berechne die erste Ableitung f' der folgenden Funktionen:

1) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ *2)* $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 x}}$ *3)* $f(x) = \sqrt{g(x)}$; $g(x) \ge 0\ \forall x \in D_g$

4) $f(x) = \cos(\ln(x^2))$ *5)* $f(x) = x^x$ *6)* $f(x) = x^{(x^x)}$

Man berechne die ersten vier Ableitungen f' bis $f^{(4)}$ der Funktion $f(x) = \sqrt{1+x}$. Weiters stelle man eine allgemeine Formel für die n-te Ableitung $f^{(n)}$ auf, überprüfe, ab wann diese git und beweise sie mittels vollständiger Induktion.

Einem Halbkreis mit Radius a ist das flächengrößte Rechteck so einzuschreiben, daß zwei der Eckpunkte auf der Kreislinie und zwei auf der x-Achse liegen.

Man diskutiere die Funktion

$$f(x) = \frac{\ln x}{1 + \ln x}$$

(Definitionsmenge, Nullstellen, Extrema, Wendepunkte, Bildmenge, Asymptoten, Skizze)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \sinh \sqrt{1 - x}.$$

Man bestimme Definitionsbereich, Nullstellen, Extrema und Monotonieverhalten!

Anmerkung: Die Übungsblätter zur Analysis T1 dient allein Ihrer Übung und Selbstkontrolle; ein Rechnen der Beispiele hat keinen (direkten) Einfluss auf Ihre Endnote. Die Beispiele werden später zum Teil im Tutorium Analysis T1 vorgerechnet; teilweise werden auch Lösungen ausgeteilt bzw. finden sich im Internet unter

http://www.cis.tugraz.at/matd/de/heersink/an1_unt.html

Beispiele, die mit einem (*) markiert sind, sind schwieriger oder gehen über den (bisher behandelten) Stoff der Analysis hinaus.

6 Analysis T1 – Übungsblatt 6

Man ermittle die folgenden Grenzwerte:

$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sinh x}{x^3-x^4}$	$\lim_{x\to\infty} \left(1+e^{-x}\right)^{e^x}$	$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x\cdot(x+1)}-x\right)$	$\lim_{x\to 1^+} (\ln x)^{x-1}$

Man berechne die folgenden Grenzwerte:

1) $\lim_{x\to 0^+} (\ln(e+x))^{1/x}$ 2) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln\frac{1-x}{1+x}}{x}$ 3) $\lim_{x\to 1} \frac{(\ln x)^2}{2x-2e^{x-1}}$

4) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos 2x-\cos x}{\sin^2 x}$ 5) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin x}-\frac{\cos x}{x}\right)$ 6) $\lim_{x\to 0} (\cosh x)^{2/x^2}$

7) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos\frac{x}{2}}{1-\cos x}$ 8) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}$ 9) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{3/x^2}$

Man bestimme das Taylorpolynom zweiten Grades der Funktion

$$f(x)=\cosh(x^2-x)$$

mit Entwicklungsmitte $x_0=0$

Man bestimme $T_2(x;\sqrt{\pi})$ der Funktion

$$f(x)=e^{\sin(x^2)}.$$

Nach der speziellen Relativitätstheorie ist die Energie eines mit der Geschwindigkeit v bewegten Körpers gegeben durch:

$$E(v)=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}},$$

wobei c die konstante Vakuumlichtgeschwindigkeit ist. Man ermittle eine Näherung für kleine Geschwindigkeiten, also $v \ll c$ bzw. $\frac{v}{c} \ll 1$.

Man bestimme die Taylorreihe von $f(x)=\frac{x}{1+x}$ mit Entwicklungsmitte $x_0=\frac{1}{3}$.	*Man bestimme die Taylorreihe von $f(x)=(1+x)\cdot e^x$ um $x_0=-1$.*

Anmerkung: Die Übungsblätter zur Analysis T1 dient allein Ihrer Übung und Selbstkontrolle; ein Rechnen der Beispiele hat keinen (direkten) Einfluss auf Ihre Endnote. Die Beispiele werden später zum Teil im Tutorium Analysis T1 vorgerechnet; teilweise werden auch Lösungen ausgeteilt bzw. finden sich im Internet unter

http://www.cis.tugraz.at/matd/de/heersink/an1_unt.html

Beispiele, die mit einem (*) markiert sind, sind schwieriger oder gehen über den (bisher behandelten) Stoff der Analysis hinaus.

7 Analysis T1 – Übungsblatt 7

Man berechne das Integral $I = \int x \sin x \, dx$.

Man berechne das Integral $I = \displaystyle\int \frac{x}{\cosh^2 x} \, dx$.

Man berechne das Integral $I = \displaystyle\int \frac{\ln(x^2)}{x^2} \, dx$.

Man berechne das Integral $I = \displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{x}{\sin^2 x} \, dx$.

Man berechne das Integral $I = \displaystyle\int_0^1 r^2 \sqrt{1-r} \, dr$.

Man berechne das Integral $\displaystyle\int \cos x \, e^{\sin x} \, dx$.

Man bestimme das Integral $I = \displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x\,(1+\ln x)} \, dx$

Man ermittle das Integral $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2} \, dx$

Man überprüfe die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz und gebe gegebenenfalls eine Abschätzung an:

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx \quad I_2 = \int_0^1 \frac{1}{x^2+\sqrt{x}} \, dx \quad I_3 = \int_0^1 \frac{x^2}{x^2+\sqrt{x}} \, dx$$

$$I_4 = \int_1^\infty \frac{1}{x^2} \, dx \quad I_5 = \int_1^\infty \frac{1}{x^2+\sqrt{x}} \, dx \quad I_6 = \int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x^2+\sqrt{x}} \, dx$$

$$I_7 = \int_0^\infty \frac{x^2 \, e^{-x}}{x^2+\sqrt{x}} \, dx$$

Man bestimme den Wert des uneigentlichen Integrals $I = \displaystyle\int_0^\infty \left(e^{-2x} + e^{-3x} + e^{-4x}\right) dx$.

Anmerkung: Die Übungsblätter zur Analysis T1 dient allein Ihrer Übung und Selbstkontrolle; ein Rechnen der Beispiele hat keinen (direkten) Einfluss auf Ihre Endnote. Die Beispiele werden später zum Teil im Tutorium Analysis T1 vorgerechnet; teilweise werden auch Lösungen ausgeteilt bzw. finden sich im Internet unter

http://www.cis.tugraz.at/matd/de/heersink/an1_unt.html

Beispiele, die mit einem (*) markiert sind, sind schwieriger oder gehen über den (bisher behandelten) Stoff der Analysis hinaus.