Kapitel 2

Integralsätze

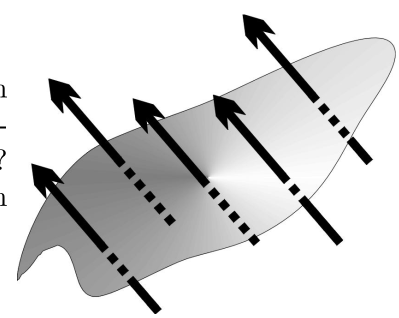
2.1 Einleitung und Übersicht

Das entscheidende Ergebnis der Analysis einer rellen Variablen ist der *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*

$$\int_a^b f\left(x\right)\,dx = F\left(b\right) - F\left(a\right),$$

der es erlaubt, das Integral über eine Funktion f über ein beliebiges Intervall anhand der Werte einer anderen Funktion F (die mit f natürlich in engem Zusammenhang steht; es muss ja $F' = f$ sein) zu berechnen. Nun stellt sich natürlich die Frage, ob etwas Analoges auch im Mehrdimensionalen möglich ist:

Kann man zum Beispiel das Volumsintegral über f in einem Bereich B anhand der Werte einer mit f zusammenhängenden Funktion am Rand von B bestimmen? Hängt das Integral über eine Fläche irgendwie mit dem Linienintegral entlang der Randkurve zusammen?



Solche Zusammenhänge sind in der Tat gegeben. Sie werden durch die *Integralsätze* ausgedrückt, deren wichtigste Vertreter im folgenden vorgestellt werden. Integralsätze gehören zu den nützlichsten Werkzeugen der Vektoranalysis überhaupt. Mit ihrer Hilfe ist es oft möglich, relativ einfach bestimmte Oberflächen oder Linienintegrale zu berechnen, mit denen man sich sonst wesentlich mehr abmühen müsste oder die überhaupt nicht mehr analytisch zu lösen wären.

Einige allgemeine Aussagen der Vektoranalysis (wie etwa der Zusammenhang zwischen Wegunabhängigkeit eines Kurvenintgrals und Verschwinden des Rotors) lassen sich ausserdem am leichtesten mittels Integralsätzen zeigen. Auch in der theoretischen Physik, und da vor allem in der Elektrodynamik, spielen Integralsätze eine tragende Rolle: Das reicht von der Behandlung simpler elektrostatischer Probleme bis zur Begründung von Randwertaufgaben.

- Der Satz von Gauß verknüpft das Integral über eine geschlossene Fläche mit dem Volumsintegral der Divergenz, er wird vor allem dazu verwendet, um bestimmte Oberflächenintegrale auszurechnen.
- Mit dem Satz von Stokes kann man Integrale über geschlossene Kurven mittels Oberflächenintegralen bestimmen (und umgekehrt). Hier ist auch die zweidimensionale Variante (Satz von Green-Riemann) oft nützlich, und ein Spezialfall, die Sektorformel, kann zum effizienten Berechnen von Flächen dienen.
- Aus dem Satz von Gauß können noch weitere Integralsätze abgeleitet werden. Besonders wichtig sind, weniger für konkrete Rechnungen, umso mehr aber zum Ableiten grundlegender Beziehungen, die beiden Integralsätze von Green.

Im Grunde genommen sind alle im Folgenden vorgestellten Integralsätze ebenso wie der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung Spezialfälle eines sehr allgemeinen Satzes, der in beliebig hohen Dimensionen (und sogar noch in wesentlich allgemeineren Räumen als es der $\mathbb{R}^n$ ist) gilt. Dieser wird als *(allgemeiner) Satz von Stokes* bezeichnet, und ist zentrales Thema der Vektoranalysis im Cartan-Kalkül. Diese Thematik wird (als unverbindliche Ergänzung) in Abschnitt **??** diskutiert.

2.2 Der Integralsatz von Gauß

Wir haben (bei der Diskussion über die Bedeutung der Divergenz) bereits gesehen, dass der gesamte Nettofluss eines Vektorfeldes $\boldsymbol{K}$ durch die Oberfläche eines infinitesimalen Quaders mit den Seitanlängen dx, dy und dz gleich der Divergenz von $\boldsymbol{K}$ am Ort des Quaders mal Quadervolumen ist. Ein wenig formaler:

$$\int_{\partial Q} \boldsymbol{K}\, d\boldsymbol{A} = \operatorname{div} \boldsymbol{K}\, dx\, dy\, dz$$

Nun kann man sich aber jeden endlichen Bereich B aus unendlichen vielen infinitesimal kleinen Quadern zusammengesetzt denken. Alle Flüsse durch die Berührungsflächen dieser Quader tragen zum Nettofluss nichts bei, denn was aus einem Quader herausfließt, fließt in den nächsten hinein. Nur die Aussenflächen des betrachteten Bereichs spielen also eine Rolle. Das führt uns zu:

Satz von Gauss (Divergenztheorem)

Sei B ein Teilbereich des $\mathbb{R}^3$ mit stückweise glattem Rand ∂B und sei $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{r})$ ein in ganz B stetig differenzierbares Vektorfeld, so gilt:

$$\int_{\partial B} \boldsymbol{K}\, d\boldsymbol{A} = \iiint_B \operatorname{div} \boldsymbol{K}\, dV$$

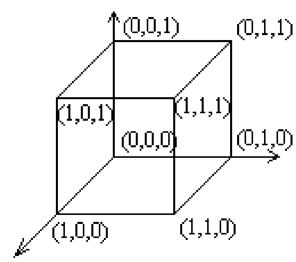
Diese Beziehung ist eine der wichtigsten in der gesamten Mathematik. Sie hat unzählige Anwendungen in Naturwissenschaft und Technik (Schlagwort: Kontinuitätsgleichungen) und darüberhinaus eine völlig anschauliche Bedeutung: Alles, was aus einem Bereich mehr ab- als zufließt, muss dort in Quellen entstehen (oder im umgekehrten Fall in Senken verschwinden). Für den Fall, dass in B weder Quellen noch Senken vorhanden sind, läßt sich das kurz und prägnant formulieren: Einfluss gleich Ausfluss.

Beispiel: Als erstes Beispiel wollen wir das Integral

$$I = \iint_{\partial W} \left(x^2 + e^{y^2+z^2}\right) dy \wedge dz + \left(y^2 + x^2 z^2\right) dz \wedge dx + \left(z^2 - e^y\right) dx \wedge dy$$

berechnen, wobei W der Einheitswürfel ist (also jener Würfel mit Ecken in $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(0,1,1)$, $(1,0,1)$, $(0,1,1)$ und $(1,1,1)$).

Auf herkömmlichem Wege müssten wir jetzt mit sechs Flächenintegralen herumschlagen, je eines für jede Würfelseite. Auch wenn es nicht schwer wäre, die Flächen zu parametrisieren und die Normalenvektoren zu ermitteln, wäre das Ausrechnen von sechs Doppelintegralen doch ein beachtlicher Aufwand. Versuchen wir es statt dessen lieber mit dem Satz von Gauß:



Unser Vektorfeld ist ja

$$\boldsymbol{K} = \left(x^2 + e^{y^2+z^2}, y^2 + x^2 z^2, z^2 - e^y\right),$$

seine Divergenz ergibt sich also zu

$$\operatorname{div} \boldsymbol{K} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + e^{y^2+z^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(y^2 + x^2 z^2\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(z^2 - e^y\right) = 2x + 2y + 2z.$$

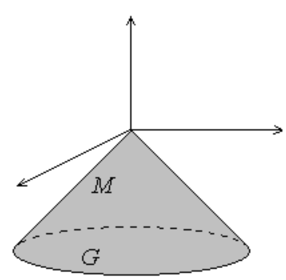
Mit dem Satz von Gauß haben wir jetzt also nur noch ein Volumsintegral zu ermitteln:

$$\begin{aligned} I &= \iiint_W (2x+2y+2z)\ dV = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (2x+2y+2z)\, dx\, dy\, dz \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (2x+2y+1)\, dxdy = \int_0^1 (2x+2)\, dx = 3 \end{aligned}$$

Beispiel: Versuchen wir nun etwas anderes: Für das Vektorfeld

$$\boldsymbol{K} = (yz, e^x + z, 1)$$

wollen wir den Fluss durch den Mantel M eines Drehkegels berechnen, dessen Spitze im Ursprung liegt, und dessen Grundfläche G ein Kreis mit Radius 2 und Mittelpunkt $(0,0,-2)$ ist.



Zwar können wir den Satz von Gauß nicht direkt auf den Kegelmantel anwenden (weil dieser ja keine geschlossene Fläche darstellt), wohl aber auf den gesamten Kegel, und man erhält mit div $\boldsymbol{K} = 0$, dass das Integral über die komplette Kegeloberfläche verschwindet. Das Oberflächenintegral über den Mantel muss also entgegengesetzt gleich groß sein wie jenes über die Grundfläche, und für dieses erhält man, da der Normalenvektor in Richtung $-\boldsymbol{e}_z$ zeigt:

$$\iint_G \boldsymbol{K}\, d\boldsymbol{A} = -\iint_G dx\, dy = -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r\, dr = -4\pi.$$

Demnach ist

$$\iint_M \boldsymbol{K}\, d\boldsymbol{A} = 4\pi.$$

Allerdings gibt es zu dem Satz von Gauß einige Anmerkungen: Bei komplizierten Bereichen B sollte man darauf achten, den Rand richtig zu berücksichtigen, das gilt besonders für eventuelle Löcher innerhalb von B. Die stetige Differenzierbarkeit des Vektorfeldes scheint eine Allerweltsbedingung zu sein, aber es gibt doch immer wieder Fälle, in denen sie doch nicht erfüllt ist und der Satz von Gauß entsprechend merkwürdige Ergebnisse liefert:

Beispiel: Ein geradezu klassisches Beispiel dafür ist das elektrische Feld einer positiven Punktladung, das durch

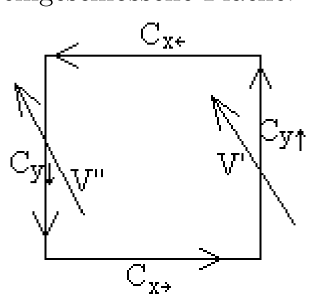
$$\boldsymbol{E} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\boldsymbol{r}$$

beschrieben wird.

2.2.1 Der Integralsatz von Stokes

Neben dem Satz von Gauß spielt vor allem der Integralsatz von Stokes in der Praxis eine bedeutende Rolle. Dieser Satz verknüpft das Linienintegral über einen geschlossenen Weg mit dem Integral des Rotors über eine beliebige eingeschlossene Fläche.

Zur Illustration (auch wenn es natürlich kein exakter Beweis ist) betrachten wir die rechts dargestellte infinitesimale Fläche in der x-y-Ebene sowie ein Vektorfeld $\boldsymbol{K}$. Nun ermitteln wir das Kurvenintegral $\oint_{C_{xy}} \boldsymbol{K}\, d\boldsymbol{s}$. Für den Weg $C_{y\uparrow}$ erhalten wir



$$\int_{C_{y\uparrow}} \boldsymbol{K}\, d\boldsymbol{s} = \boldsymbol{K} \cdot d\boldsymbol{y} = K_y'\, dy,$$

wobei K_y' die (näherngsweise konstante) y-Komponente des Vektorfeldes auf dem

Weg $C_{y\uparrow}$ ist. Analog erhalten wir $\int_{C_{y\downarrow}} \boldsymbol{K}\, d\boldsymbol{s} = -K_y''\, dy$, insgesamt also (unter Benutzung von $df = \frac{\partial f}{\partial x}\, dx$):

$$\int_{C_y} \boldsymbol{K}\, d\boldsymbol{s} = (K_y' - K_y'')dy = dK_y\, dy = \frac{\partial K_y}{\partial x}\, dx\, dy$$

Analog ergibt sich für C_x der Ausdruck $\int_{C_x} = -\frac{\partial K_x}{\partial y}\, dx\, dy$, insgesamt also

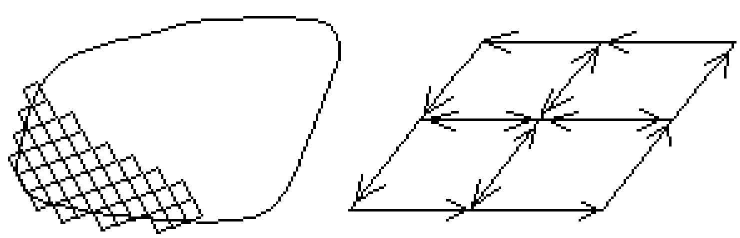
$$\oint_{C_{xy}} \boldsymbol{K}\, d\boldsymbol{s} = \left(\frac{\partial K_y}{\partial x} - \frac{\partial K_x}{\partial y}\right) dx\, dy = \{\text{rot}\ \boldsymbol{K}\}_z\ dx\, dy$$

Im allgemeinen kann eine Fläche natürlich beliebig im Raum orientiert sein, man erhält also noch die zusätzlichen Beiträge

$$\oint_{C_{xz}} \boldsymbol{K}\, d\boldsymbol{s} = \{\text{rot}\ \boldsymbol{K}\}_y\ dx\, dz \quad \text{und} \quad \oint_{C_{yz}} \boldsymbol{K}\, d\boldsymbol{s} = \{\text{rot}\ \boldsymbol{K}\}_x\ dy\, dz,$$

Für das Kurvenintegrla ergibt sich insgesamt $\oint_C \boldsymbol{K}\, d\boldsymbol{s} = \text{rot}\ \boldsymbol{K} \cdot d\boldsymbol{A}$.

Alle diese Betrachtungen gelten bisher nur für eine infinitesimale Fläche. Nun kann man sich aber jede Fläche endlicher Ausdehnung genau aus solchen Stückchen zusammengesetzt denken.



Da sich in Gegenrichtung durchlaufene Wege bei Kurvenintegralen aufheben, bleibt nur das Integral entlang des Randes der großen Fläche übrig. Der Term rot $\boldsymbol{K} \cdot d\boldsymbol{A}$ hingegen trägt von jeder infintesimalen Flächen bei, man muss also zum Oberflächenintegral übergehen. Insgesamt erhält man also:

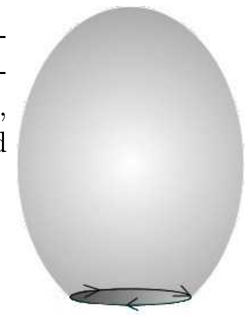
Satz von Stokes

Sei $\boldsymbol{K}$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld im $\mathbb{R}^3$ und F eine orientierbare stückweise glatte Fläche mit dem stückweise glatten Rand ∂F, der den nach außen weisenden Normalenvektor der Fläche im mathematisch positiven Sinne umläuft. Dann gilt:

$$\oint_{\partial F} \boldsymbol{K}\, d\boldsymbol{s} = \iint_F \text{rot}\ \boldsymbol{K} \cdot d\boldsymbol{A}$$

Wesentlich ist dabei, dass F eine *beliebige* Fläche sein kann, die von der Kurve $C = \partial F$ umschlossen wird. Unter bestimmten Umständen kann man so die Berechnung von Integralen über geschlossene Wege wesentlich vereinfachen. Noch wesentlicher sind allerdings die allgemeinen Folgerungen aus dem Satz von Stokes:

Kurvenintegrale sind ja genau dann wegunabhängig, wenn das Integral über jeden geschlossenen Weg gleich Null ist. Damit aber das der Fall ist, muss nach dem Satz von Stokes auch das Integral des Rotors über jede beliebige Fläche verschwinden – und das wiederum kann nur dann sein, wenn der Rotor des Vektorfeldes selbst überall Null ist. Daher ist rot $\boldsymbol{K} = \mathbf{0}$ äquivalent zur Wegunabhängigkeit von Kurvenintegralen $\int_C \boldsymbol{K}\, d\boldsymbol{s}$.



Außerdem kann man sich jede geschlossene Fläche dadurch entstanden denken, dass man eine berandete Fläche entsprechend zusammenzieht. Die Länge der Randkurve geht dabei gegen Null, ebenso das Linienintegral über jedes beschränkte Vektorfeld, und man erhält mit dem Satz von Stokes

$$\oint_F \mathrm{rot}\, \boldsymbol{K}\, d\boldsymbol{A} = 0$$

für beliebige Vektorfelder und jede geschlossene Fläche F.

Einen wichtiger Spezialfall des Satzes von Stokes erhält man, indem man eine Kurve betrachtet, die völlig in der x-y-Ebene liegt. Dann kann auch die eingeschlossene Fläche in dieser Ebene gewählt werden, und man erhält den folgenden Satz, für den (je nach Quelle) die Bezeichungen Satz von Green-Riemann, Satz von Green-Gauß, Satz von Green in der Ebene, Satz von Stokes in der Ebene und Satz von Gauß in der Ebene üblich sind:

Satz von Green-Riemann

Sei C eine geschlossene, stückweise glatte Kurve in der Ebene, die mathematisch positiv durchlaufen wird und einen Bereich B begrenzt, dann gilt für die stetig differenzierbaren Funktionen $f(x, y)$ und $g(x, y)$:

$$\oint_C (f\, dx + g\, dy) = \iint_B \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

Dieser Satz ist auch ein guter Ausgangspunkt für einen strengen Beweis des Satzes von Stokes. Für Normalbereich ist nämlich nicht schwierig zu zeigen, dass die beiden Integrale übereinstimmen, davon ausgehend kann man auch auf kompliziertere und schließlich (durch Projektion) auf beliebig im Raum orientierte Flächen übergehen.

Besonders nützlich ist der Satz von Green-Riemann zur Berechnung von Flächen. Setzt man nämlich $f(x, y) = -y$ und $g(x, y) = x$, so ergibt sich

$$\oint_C (-y\, dx + x\, dy) = \iint_B \left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} \right) = 2 \iint_B dx\, dy = 2A_B,$$

also der doppelte Flächeninhalt des Bereichs B. Man erhält also:

> **Sektorformel**
>
> Ist B ein Bereich mit dem Flächeninhalt A_B, der von der stückweise glatten Kurve C begrenzt wird, so gilt
>
> $$A_B = \frac{1}{2} \oint_C (-y\,dx + x\,dy)$$

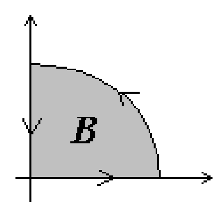
Nun aber zu einigen Anwendungen des Satzes von Stokes und seiner Spezialfälle:

Beispiel: Wir berechnen $I = \int_C \left\{(x-z)\,dx - xz\,dy + y^2\,dz\right\}$ entlang der positiv orientierten Schnittkurve des Zylinders $x^2 + y^2 = 4$ mit der Ebene $z = 3$. C ist eine Kreislinie mit Radius $r = 2$, und mit dem Satz von Stokes gehen wir auf das Oberflächenintegral des Rotors auf der Kreisfläche (mit $\boldsymbol{n} = (0,0,1)$ über:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{K} &= \begin{pmatrix} x-z \\ xz \\ y^2 \end{pmatrix} \qquad \operatorname{rot} \boldsymbol{K} = \begin{pmatrix} 2y-x \\ -1 \\ z \end{pmatrix} \\ I &= \iint_B z\,dx\,dy = 3 \int_{r=0}^{2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} r\,dr\,d\varphi = 12\pi \end{aligned}$$

Beispiel: Wir berechnen $I = \int_{\partial B} \left((x^2-y)dx + xy\,dy\right)$, wobei ∂B der positiv orientierte Rand jenes Bereichs ist, der von $x = \sqrt{1-y}$, $x = 0$ und $y = 0$ begrenzt wird: Der Satz von Green-Riemann ergibt mit $f_y = -1$ und $g_x = y$ für das Integral

$$\begin{aligned} I &= \iint_B (y+1)\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x^2} (y+1)\,dy = \int_0^1 dx \left(\frac{y^2}{2} + \right. \\ &= \int_0^1 \left(\frac{(1-x^2)^2}{2} + 1 - x^2\right) dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}(1-2x^2+x^4) + 1 - \right. \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^4 - 2x^2 + \frac{3}{2}\right) dx = \left(\frac{1}{10}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x\right)\Big|_0^1 = \frac{14}{15} \end{aligned}$$



Beispiel: Mit der Sektorformel wollen wir den Flächeninhalt einer Ellipse mit den Halbachsen a und b berechnen. Begrenzt wird diese von der Kurve C: $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$. Man erhält also mit $dx = -a\sin t\,dt$ und $dy = b\cos t\,dt$:

$$\begin{aligned} A_{ell} &= \frac{1}{2} \oint_C (-y\,dx + x\,dy) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (ab\cos t\sin t + ab\cos t\sin t)\;dt = \\ &= ab \int_0^{2\pi} \cos t \sin t\,dt = ab\pi \end{aligned}$$

Für $a = b = r$ erhält man daraus die bekannte Formel für die Kreisfläche $A_\circ = r^2\pi$.

2.2.2 Weitere Integralsätze

Aus dem Satz von Gauß können mehr oder weniger direkt noch weitere Integralsätze abgeleitet werden. Zu zwei gelegentlich nützlichen Umformulierungen des Gaußschen Satzes gelangt man, indem man einen beliebigen, aber konstanten Vektor $\boldsymbol{a}$ betrachtet. Klarerweise gilt, wenn B ein von F begrenzter Volumsbereich ist, $\text{div}\,(\boldsymbol{a}\Phi) = a \cdot \text{grad}\,\Phi$, und damit erhält man

$$\boldsymbol{a} \cdot \iiint_B \text{grad}\,\Phi\,dV = \iiint_B \text{div}\,(\boldsymbol{a}\Phi)\,dV = \oint_F (\boldsymbol{a}\Phi)\,d\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a} \cdot \oint_F \Phi\,d\boldsymbol{A}$$

Da der Vektor $\boldsymbol{a}$ aber völlig beliebig war, muss gelten:

$$\iiint_B \text{grad}\,\Phi\,dV = \oint_F \Phi\,d\boldsymbol{A}$$

Analog erhält man durch Anwendung des Gaußschen Satzes auf rot $\boldsymbol{K}$ mit Hilfe von $\text{div}\,(\boldsymbol{K} \times \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a} \cdot \text{rot}\,\boldsymbol{K}$ die Beziehung

$$\iiint_B \text{rot}\,\boldsymbol{K}\,dV = -\oint_F \boldsymbol{K} \times d\boldsymbol{A}.$$

Noch wichtiger sind zwei andere Sätze, die man ebenfalls aus dem Satz von Gauß gewinnen kann.

Integralsätze von Green

Für zwei skalare, zumindest zweimal differenzierbare Felder $\Phi(\boldsymbol{r})$ und $\Psi(\boldsymbol{r})$ gilt, wenn B ein Raumbereich ist, der von der stückweise stetig differenzierbaren Fläche F begrenzt wird:

$$\iiint_B (\Phi\,\Delta\Psi + (\nabla\Phi) \cdot (\nabla\Psi))\,dV = \oint_F \Phi\,\nabla\Psi\,d\boldsymbol{A}$$

$$\iiint_B (\Phi\,\Delta\Psi - \Phi\,\Delta\Psi)\,dV = \oint_F (\Phi\,\nabla\Psi - \Psi\,\nabla\Phi) d\boldsymbol{A}$$

Setzt man in den Greenschen Sätzen $\Phi = 1$, so erhält man als wichtigen Sonderfall

$$\iiint_B \Delta\Psi\,dV = \int_F \nabla\Psi\,d\boldsymbol{A}.$$

In der theoretischen Physik, insbesondere in der Elektrodynamik haben diese Integralsätze eine immense Bedeutung. Mit ihrer Hilfe geht man überhaupt erst auf Randwertprobleme über, auch bei der numerischen Lösung partieller Differentialgleichungen (Schlagwort: finite Elemente) sind sie wichtige Hilfsmittel. Beim Rechnen konkreter Beispiel mit Papier und Bleistift spielen sie hingegen eine viel kleinere Rolle als die Integralsätze von Gauß und Stokes.

2.2.3 Übungsbeispiele

Man berechne das Oberflächenintegral

$$I = \iint_{\partial B} \left(x + e^{\left(z^2\right)}\right) dy \wedge dz + \left(x^2 - y^2 + z^2\right) dz \wedge dx + (1 - xyz)\, dx \wedge dy,$$

wobei B *jener Bereich ist, der von den Flächen* $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ *und* $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ *eingeschlossen wird.*

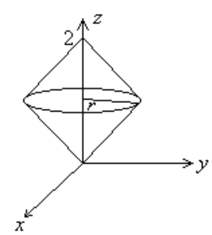
Nach dem Satz von Gauß erhält man mit

$$\operatorname{div} \boldsymbol{K} = 1 - 2y - xy$$

für das Integral

$$I = \iiint_B (1 - 2y - xy)\, dxdydz.$$

Der Integrationsbereich B liegt hier innerhalb zweier Kegel: Der erste hat die Spitze im Ursprung und öffnet sich nach oben, der zweite hat die Spitze in $\boldsymbol{r} = (0, 0, 2)$ und öffnet sich nach unten. Da B zylindersymetrisch um die z-Achse ist, wird die Berechnung des Volumsintegrals in Zylinderkoordinaten $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$ besonders einfach:



$$I = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1} \int_{z=r}^{2-r} \left(1 - 2r\sin\varphi - r^2 \sin\varphi\cos\varphi\right) r\, d\varphi dr dz$$

Die Integration über φ ist von den beiden anderen Integralen unabhängig und es gilt $\int_0^{2\pi} \sin\varphi\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi = 0$, also liefert nur der erste Term des Integranden einen Beitrag:

$$I = 2\pi \int_0^1 r\,(2 - r - r)\, dr = 2\pi \int_0^1 \left(2r - 2r^2\right) dr = \frac{2\pi}{3}$$

Man berechne das Linienintegral

$$L = \int_C \left\{ (x - 2y^2 z)dx + (x^3 - z^2)dy + (x^2 + y^2)dz \right\},$$

wobei C die Schnittkurve der beiden Flächen $z^2 = x^2 + y^2$ und $z = \frac{8}{x^2+y^2}$ ist.

Zunächst geht es einmal darum die Art der Schnittkurve zu bestimmen. Dazu setzen wir $z^2 = x^2 + y^2$ und $z^2 = \frac{64}{(x^2+y^2)^2}$ gleich und erhalten $(x^2 + y^2)^2 = 64$ oder $x^2 + y^2 = 4$ – der Integrationsweg ist also ein Kreis. Einsetzen in eine der beiden Flächengleichungen liefert ausserdem $z = 2$. Nun bietet sich der Satz von Stokes an. Für das Vektorfeld und seine Rotation erhält man:

$$\boldsymbol{K} = \begin{pmatrix} x - 2y^2 z \\ x^3 - z^2 \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix} \qquad \text{rot}\,\boldsymbol{K} = \begin{pmatrix} 2y + 2z \\ -2y^2 - 2x \\ 3x^2 + 4yz \end{pmatrix}$$

Für die Fläche F kann an sich jede gewählt werden, die von C berandet wird, am einfachsten ist natürlich die Kreisscheibe in der Ebene $z = 2$. Der Normalvektor darauf ist $\boldsymbol{n} = (0, 0, 1)$ und damit spielt nur die z- Komponente des Rotors eine Rolle. Wir erhalten ein Integral, das man am besten in Polarkoordinaten löst:

$$\begin{aligned} L &= \iint_{x^2+y^2 \le 4} (3x^2 + 8y)dx\,dy = \int_{r=0}^{2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} (3r^2 \cos^2\varphi + 8r \sin\varphi) r\,dr\,d\varphi = \\ &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} cos^2\varphi\,d\varphi \cdot \int_{r=0}^{2} 3r^3\,dr + \int_{\varphi=0}^{2\pi} sin\varphi\,d\varphi \cdot \int_{r=0}^{2} 8r^2\,dr = \pi\,3\,\frac{r^4}{4}\Big|_0^2 + 0 = 12\pi. \end{aligned}$$

Man berechne das Oberflächenintegral $\iint_{\partial B}(x+z^2)dy\wedge dz+(z-y)dz\wedge dx+x^2z\,dx\wedge dy$, *wobei der Bereich* B *von den Flächen* $x^2+z^2=1$ *und* $x^2+y^2=1$ *begrenzt wird.*

Mit $\boldsymbol{K}=(x+z^2,z-y,x^2+z)$ erhalten wir div $\boldsymbol{K}=1-1+x^2=x^2$ und mit dem Satz von Gauß

$$\iint_{\partial B}\boldsymbol{K}\,d\boldsymbol{A}=\iiint_B \operatorname{div}\boldsymbol{K}\,dV=\iiint_B x^2\,dx\,dy\,dz$$

B wird von zwei Zylindern begrenzt, hier ist günstig z und y durch x auszudrücken und über diese Variable als letztes zu integrieren. Das ergibt $x^2+z^2=1\ \rightarrow\ z=\pm\sqrt{1-x^2}$, $x^2+y^2=1\ \rightarrow\ y=\pm\sqrt{1-x^2}$ und damit weiter:

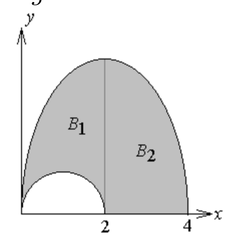
$$\begin{aligned}
\iiint_B \operatorname{div}\boldsymbol{K}\,dV &= \int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}x^2\,dz= \\
&= \int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\,x^2\,z\Big|_{z=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}= \\
&= 2\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}x^2\sqrt{1-x^2}\,dy= \\
&= 2\int_{-1}^{1}dx\,x^2\sqrt{1-x^2}\,y\Big|_{y-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \\
&= 4\int_{-1}^{1}x^2(1-x^2)\,dx=4\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=\frac{16}{15}
\end{aligned}$$

Man berechne das Kurvenintegral

$$K = \int_{\partial B} (xy^2\,dx + xy\,dy),$$

wobei ∂B der positiv orientierte Rand jenes Bereiches B ist, der von $y = \sqrt{2x - x^2}$ für $0 \leq x < 2$, $y = 0$ für $2 \leq x \leq 4$ und $y = \sqrt{4x - x^2}$ für $0 \leq x \leq 4$ begrenzt wird.

Der Satz von Green-Riemann $\int_{\partial B} f\,dx + g\,dy = \iint_B g_y - f_x\,dx\,dy$ ergibt mit $f = xy^2$, $f_y = 2xy$, $g = xy$ und $g_x = y$ weiter



$$K = \int_{\partial B} (xy^2\,dx + xy\,dy) = \iint_B y(1-2x)\,dx\,dy$$

und nach Zerlegung in Normalbereiche (siehe Skizze) erhält man:

$$\begin{aligned}
K &= \iint_{B_1} y(1-2x)\,dx\,dy + \iint_{B_2} y(1-2x)\,dx\,dy \\
&= \int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4x-x^2}} y(1-2x)\,dy + \int_2^4 dx \int_0^{\sqrt{4x-x^2}} y(1-2x)\,dy \\
&= \int_0^2 dx(1-2x)\frac{y^2}{2}\Big|_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4x-x^2}} + \int_2^4 dx(1-2x)\frac{y^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{4x-x^2}} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^2 (1-2x)\cdot 2x\,dx + \frac{1}{2}\int_2^4 (1-2x)(4x-x^2)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^2 (2x-4x^2)\,dx + \frac{1}{2}\int_2^4 (2x^3-9x^2+4x)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{4}{3}x^3\right)\Big|_0^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^4 - 3x^3 + 2x^2\right)\Big|_2^4 = -\frac{46}{3}
\end{aligned}$$