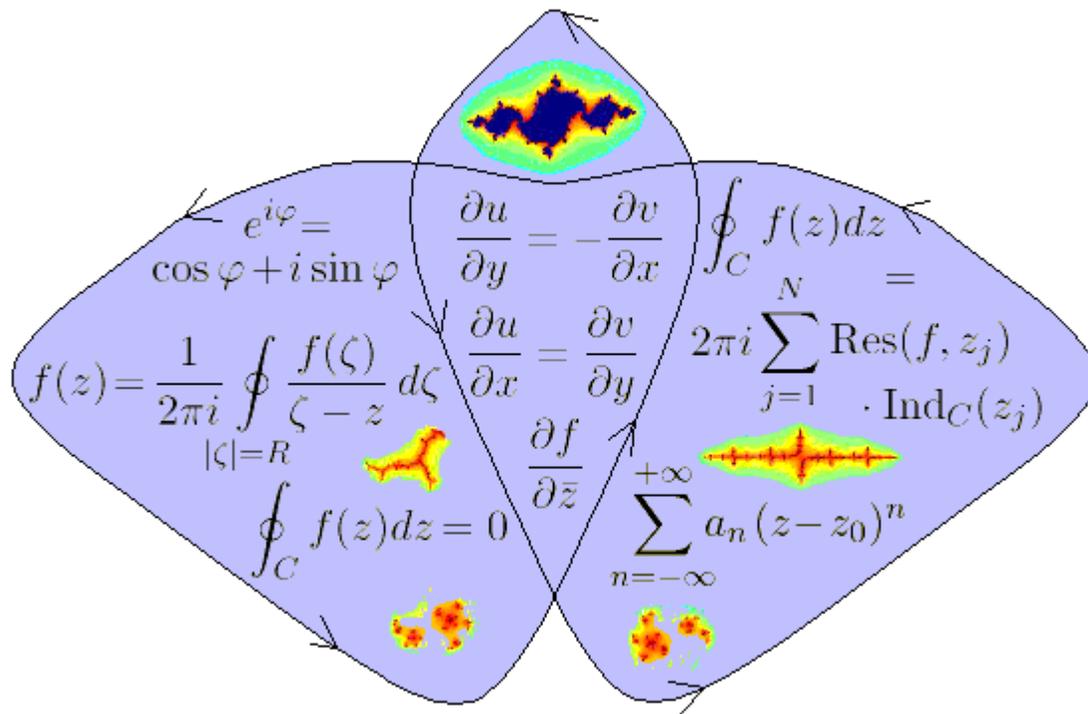
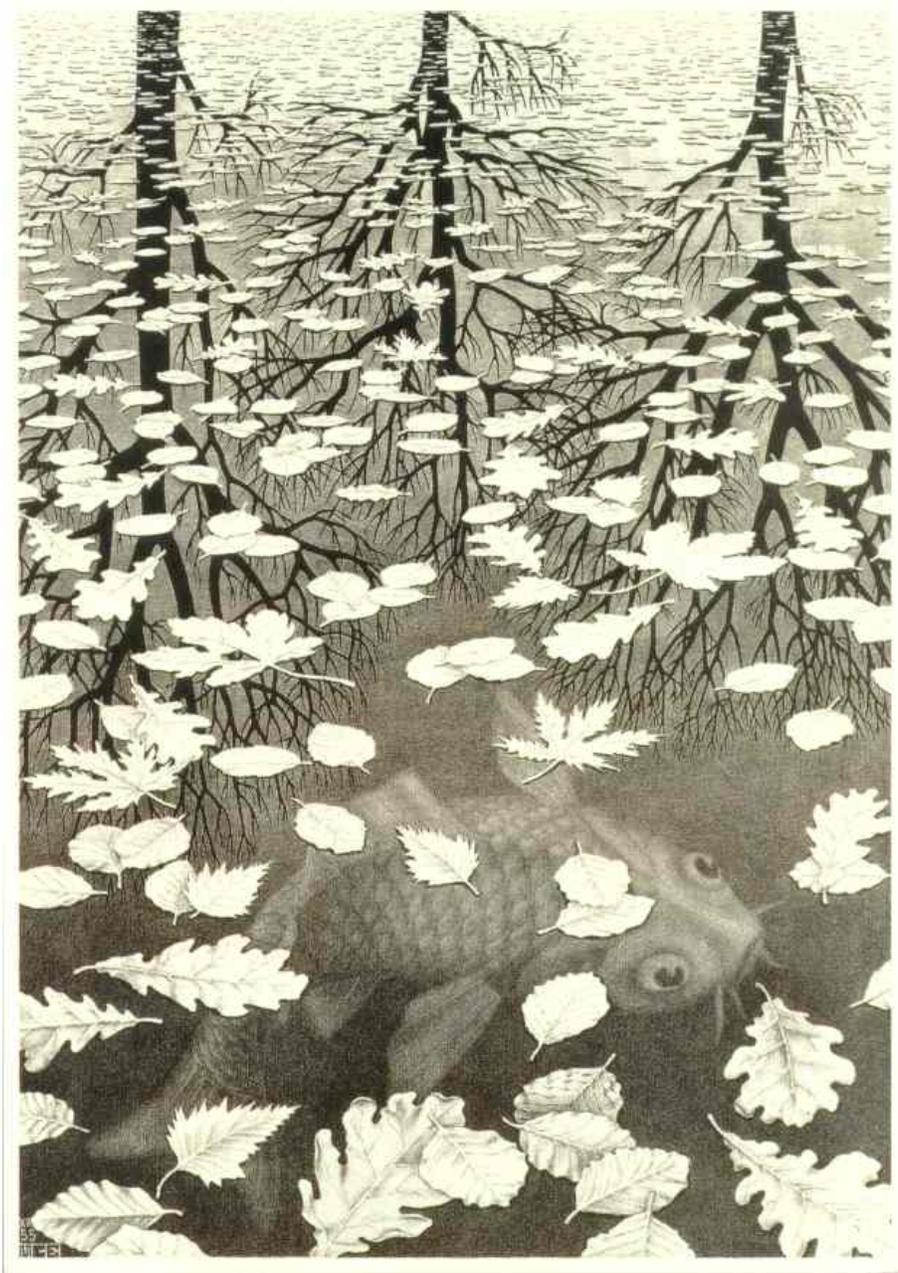


Klaus Lichtenegger

KOMPLEXE ANALYSIS



Eine Einführung in die Funktionentheorie
im Rahmen der Analysis 2 – Telematik
1. Auflage, Mai/Juni 2002

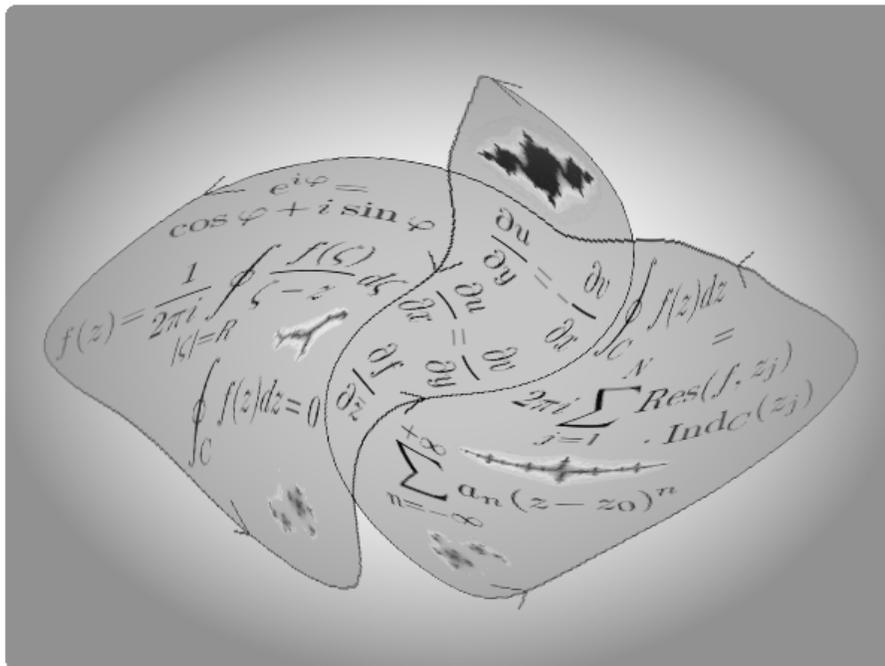


M. C. Escher: *Drei Welten* (Lithographie, 1955)

Inhaltsverzeichnis

1	Die Komplexen Zahlen	1
1.1	Eine kurze Geschichte der komplexen Zahlen	1
1.2	Axiomatische Einführung der komplexen Zahlen	2
1.3	Rechenregeln für komplexe Zahlen	3
1.4	Teilmengen der komplexen Ebene	7
1.5	Charakterisierung von Mengen	8
1.6	Übungsaufgaben	10
2	Komplexe Differenzierbarkeit	13
2.1	Allgemeines zu komplexen Funktionen	13
2.2	Exponential- und Winkelfunktionen	14
2.3	Logarithmus, Arcus- und Areafunktionen	15
2.4	Komplexe Differenzierbarkeit	17
2.5	Die Cauchy-Riemann-Gleichungen	18
2.6	Die Wirtinger-Operatoren	19
2.7	Einige Eigenschaften holomorpher Funktionen	21
2.8	Harmonische Funktionen	21
2.9	Übungsaufgaben	24
3	Komplexe Kurvenintegrale	27
3.1	Komplexwertige Funktionen mit reellem Argument	27
3.2	Wege in der komplexen Ebene	29
3.3	Kurvenintegrale	30
3.4	Wegunabhängigkeit: Der Cauchysche Integralsatz	33
3.5	Die Cauchysche Integralformel	35
3.6	Übungsaufgaben	38
4	Laurentreihen und Residuensatz	43
4.1	Potenzreihen im Komplexen	43
4.2	Laurentreihen	45
4.3	Klassifikation von Singularitäten	48
4.4	Der Residuensatz	50
4.5	Berechnung reeller Integrale mittels Residuensatz	54
4.6	Übungsaufgaben	58

5	Weitere Sätze und Begriffe	61
5.1	Der Satz von Rouché	61
5.2	Verhalten im Unendlichen	63
5.3	Analytische Fortsetzung und Riemannsche Flächen	65
5.4	Konforme Abbildungen und die Möbiustransformation	67
5.5	Die Poissonsche Integralformel	70
5.6	Ausblicke	71
5.7	Übungsaufgaben	71
A	Lösungen und Literatur	73
A.1	Lösungen (Komplexe Zahlen)	73
A.2	Lösungen (Komplexe Differenzierbarkeit)	75
A.3	Lösungen (Kurvenintegrale)	76
A.4	Lösungen (Laurentreihen und Residuensatz)	77
A.5	Lösungen (Weitere Sätze und Begriffe)	77
A.6	Literaturangaben	77



Kapitel 1

Die Komplexen Zahlen

Komplexe Zahlen gehören zu den vielleicht nützlichsten Objekten der Mathematik überhaupt. Mit ihrer Hilfe kann man Rechnungen oft wesentlich vereinfachen (Stichworte: Schwingungen, Wechselstromrechnung), vor allem aber ermöglichen es komplexe Zahlen häufig, Zusammenhänge zu erkennen, die man beim Arbeiten im rein Reellen höchstens erahnen kann.

Darüberhinaus baut auf ihnen in weiterer Folge die komplexe Analysis oder Funktionentheorie auf, der man in vielen Bereichen der Mathematik wieder begegnet, beispielsweise auch beim Berechnen von manchen reellen Integralen. Funktionentheoretische Mittel sind ebenfalls in den verschiedensten Anwendungen entweder nützlich (Fluidmechanik) oder fast unumgänglich (Elektrodynamik, Quantenmechanik).

Allerdings haftete den komplexen Zahlen lange Zeit die Aura von etwas Mysteriösem, nicht unbedingt sehr Vertrauenswürdigem an. Erst nach und nach wurde das Rechnen mit ihnen auf ein solides Fundament gestellt; diese historische Entwicklung wollen wir kurz nachzeichnen, bevor wir dann die komplexen Zahlen streng axiomatisch einführen. Anschließend werden die wichtigsten Begriffe und Rechenregeln behandelt, vor allem für Wurzeln und Potenzen.

In den letzten beiden Abschnitten befassen wir uns dann näher mit Punktmengen im Komplexen, zunächst mit ihrer Beschreibung, dann damit, nach welchen Gesichtspunkten man sie genauer charakterisieren kann – dabei werden metrische und topologische Begriffe eine wesentliche Rolle spielen.

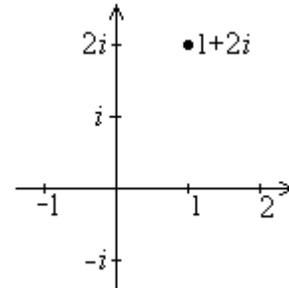
1.1 Eine kurze Geschichte der komplexen Zahlen

Das erstmal mit komplexen Zahlen konfrontiert wurden die Mathematiker im 16. Jahrhundert, und zwar beim Lösen von Gleichungen höheren Grades. In bestimmten Fällen treten in den dortigen Lösungsformeln nämlich Ausdrücke wie etwa $\sqrt{-121}$ auf, die anscheinend sinnlos sind, schließlich gibt es keine reellen Zahlen, deren Quadrat negativ ist. Nimmt man aber einfach an, es gäbe etwas Derartiges und rechnet damit auf naheliegende Weise weiter, so erhält man etwa bei kubischen Gleichungen am Ende ein vollkommen richtiges reelles Ergebnis.

Solche in der Rechnung auftretende Zahlen nannte man, da sie ja nicht „reell“ sein konnten, *imaginär*. So führte man eine imaginäre Einheit i mit der Eigenschaft $i^2 = -1$ und allgemein imaginäre Zahlen ia mit $(ia)^2 = -a^2$ ein. Als komplexe Zahlen bezeichnete man die Summe einer reellen und einer imaginären Zahl, also Ausdrücke der Form $a + bi$. Der italienische Ingenieur Bombelli etwa rechnete um 1560 bereits systematisch mit komplexen Zahlen, von ihm stammte auch der Vorschlag, die imaginäre Einheit als drittes Vorzeichen neben $+$ und $-$ anzusehen. Die heute noch verwendete Bezeichnung i wurde erst um 1770 von Euler eingeführt.

Doch lange Zeit war kaum jemand wirklich glücklich mit den komplexen Zahlen. Auf der einen Seite führte das Rechnen mit ihnen zu unzweifelhaft richtigen Ergebnissen, auf der anderen Seite existierten sie einfach nicht, auf jeden Fall nicht in dem Sinne wie die reellen Zahlen. Leibnitz etwa nannte sie „ein Amphibium zwischen Sein und Nichtsein“.

Einer der Gründe, die die meisten Mathematiker an den komplexen Zahlen zweifeln ließen, war, dass sie eben keinen Platz auf der schönen Zahlengeraden hatten; dieses Dilemma wurde von Carl Friedrich Gauß gelöst. Er führte senkrecht zur (reellen) Zahlengeraden noch eine zweite Achse mit imaginärer Skala ein. In dieser Ebene, der Gaußschen Zahlenebene \mathbb{C} fand nun jede komplexe Zahl ihren Platz; diese anschauliche geometrische Interpretation der komplexen Zahlen trug wesentlich zu ihrer vollständigen Anerkennung in der Welt der Mathematik bei.



Restlos entmystifiziert wurden die komplexen Zahlen schließlich vom irischen Mathematiker und Physiker Hamilton, der sie erstmals so einführte, wie auch wir es im nächsten Abschnitt tun werden: axiomatisch durch Angabe gewisser Rechenregeln für Paare von reellen Zahlen.

1.2 Axiomatische Einführung der komplexen Zahlen

\mathbb{R} sei die Menge der reellen Zahlen. Nun bilden wir das kartesische Produkt

$$\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

und erklären für diese Paare (a, b) von reellen Zahlen die folgenden Rechenregeln:

$$\begin{aligned} (a, b) + (c, d) &:= (a + c, b + d) \\ (a, b) \cdot (c, d) &:= (ac - bd, ad + bc) \end{aligned}$$

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist mit diesen Definitionen ein Körper, der Körper der komplexen Zahlen; diese Zahlen werden wir meist mit dem Buchstaben z bezeichnen. Dabei nennt man a den Real- und b den Imaginärteil der komplexen Zahl (a, b) , es wird bald klarwerden, woher diese Bezeichnungen kommen.

Bis jetzt sieht es ja nicht so aus, als ob das viel mit dem zu tun hätte, was man in der Schule als komplexe Zahlen kennenlernt; die Formel für die Multiplikation wirkt darüber hinaus wie der ideale Kandidat zum Vergessen oder Durcheinanderbringen. Glücklicherweise braucht man sie sich in dieser Form nicht zu merken, und gleich werden wir auch den Bezug unserer Definitionen zu reellen Zahlen einer- und den gewohnten komplexen Zahlen andererseits herstellen:

Für komplexe Zahlen mit Imaginärteil Null gilt $(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0)$ und $(a, 0) \cdot (b, 0) = (ab, 0)$. Formal verhalten sie sich also wie reelle Zahlen, deshalb identifiziert man die komplexe Zahl $(a, 0)$ auch mit der reellen Zahl a .

Weiters kann man eine beliebige komplexe Zahl auch in der Form

$$(a, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1)$$

schreiben. Nun definiert man $i := (0, 1)$ und erhält damit

$$(a, b) = a + bi,$$

das nennt man die Normaldarstellung der komplexen Zahlen, die auf diesem Weg streng begründet wird.

Die im Reellen unlösbare Gleichung $x^2 + 1 = 0$ hat nun zwei komplexe Lösungen, nämlich $z = +i$ und $z = -i$, denn es ist ja $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$ und analog für $z = -i$.

Das ist übrigens auch der Grund, warum man die Formel für die Multiplikation nicht im Kopf behalten muss. Hat man es mit Produkten von komplexen Zahlen in Normaldarstellung zu tun, so multipliziert man einfach aus und setzt dann überall, wo i^2 steht, -1 ein:

$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + dbi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Wir haben also unsere ursprünglich definierte Multiplikationsformel wiedergefunden.

Beispiel: Als kleine Übung berechnen wir für $z_1 = 2 + 3i$ und $z_2 = -1 + i$ Summe und Produkt:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= 2 + 3i - 1 + i = 1 + 4i \\ z_1 z_2 &= (2 + 3i)(-1 + i) = -2 + 2i - 3i - 3 = -5 - i \end{aligned}$$

Das gleiche Ergebnis erhält man natürlich auch für $z_2 + z_1$ beziehungsweise $z_2 z_1$, denn wie die anderen Körperaxiome sind natürlich auch die Kommutativgesetze für Addition und Multiplikation erfüllt.

Mit weiteren Rechenregeln und anderen Darstellungen der komplexen Zahlen wollen wir uns im nächsten Abschnitt befassen, hier nur noch eine Anmerkung: Oft liest man (teilweise auch in guten Büchern) $i = \sqrt{-1}$. Dabei weiß zwar jeder, was gemeint ist, trotzdem ist die Schreibweise $\sqrt{-1}$ nicht zu empfehlen, denn in diesem Zusammenhang gelten die üblichen Rechenregeln für Wurzeln nicht mehr. So ist etwa die folgende Rechnung definitiv falsch:

$$-1 = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$$

Noch etwas wäre zu komplexen Zahlen im allgemeinen zu sagen: Im Gegensatz zu \mathbb{R} ist \mathbb{C} kein geordneter Körper mehr, Ausdrücke wie $z_1 < z_2$ haben also keinen Sinn mehr. Sieht man doch irgendwo etwa $z < w$ stehen, so bedeutet das: z und w sind beide reell und es ist $z < w$.

1.3 Rechenregeln für komplexe Zahlen

Bei komplexen Zahlen $z = x + iy$ nennt man wie schon erwähnt x den Real- und y den Imaginärteil, beide sind reelle Zahlen:

$$x = \operatorname{Re} z \quad y = \operatorname{Im} z$$

Die zu z komplex konjugierte Zahl wird mit \bar{z} oder manchmal (vor allem in der physikalischen Literatur) auch mit z^* bezeichnet, für sie gilt:

$$\bar{z} = x - iy.$$

Wie man sich leicht überzeugen kann, ist $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$, $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ und $\overline{\bar{z}} = z$. Das Produkt einer komplexen Zahl mit ihrer konjugiert komplexen ist reell, $z \bar{z} = x^2 + y^2$ und die Wurzel daraus nennt man den Betrag der Zahl z :

$$r = |z| = \sqrt{z \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Für den Betrag gilt: $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ (Betrag eines Produkts ist gleich dem Produkt der Beträge) und weiters die Dreiecksungleichung $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Über Addition und Multiplikation von komplexen Zahlen haben wir ja schon gesprochen, die Subtraktion sollte keine Schwierigkeiten machen $((a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i)$ und mit der komplex konjugierten Zahl können wir nun auch die Division behandeln. Bei einem Ausdruck der Form $\frac{z}{w}$ haben wir meist in Zähler und Nenner ein i stehen, eigentlich hätten wir ja gerne die Normalform $x + iy$. Um das zu erreichen, müssen wir aber nur Zähler und Nenner mit \bar{w} multiplizieren, man erhält dann

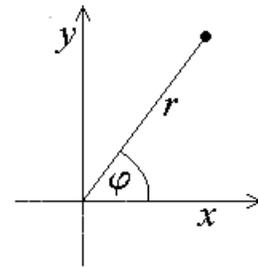
$$\frac{z}{w} = \frac{z\bar{w}}{w\bar{w}} = \frac{z\bar{w}}{|w|^2},$$

also das Produkt zweier komplexer Zahlen, dividiert durch einen rein reellen Faktor.

Es gibt aber einen noch angenehmeren Weg, Multiplikationen und Divisionen im Komplexen zu behandeln:

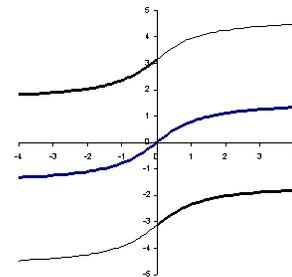
Wie schon von Gauß bemerkt, lassen sich komplexe Zahlen ja als Punkte (oder auch Vektoren) in der Ebene deuten – und solche Punkte kann man ja außer mit kartesischen Koordinaten auch auf andere Weise beschreiben, etwa mit Polarkoordinaten. Dazu führen wir für komplexe Zahlen neben dem Betrag r noch das Argument (die Phase) φ ein:

$$\varphi = \arg z = \arctan \frac{y}{x}$$



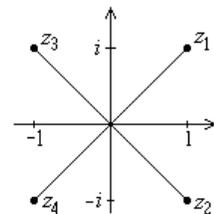
Dieses ist ja an sich nur bis auf $\pm 2\pi$ bestimmt. In den meisten Fällen schränkt man den Wertebereich von φ auf $(-\pi, \pi]$ ein und spricht dann vom *Hauptwert* des Arguments, $\text{Arg } z$.

Ganz generell gibt es beim Berechnen des Arguments aber einen Fallstrick, nämlich die Mehrdeutigkeit des Arcustangens. Es ist nämlich keineswegs klar, welchen Zweig man nehmen muss, und oft ist es hilfreich, sich die entsprechende Zahl aufzuzeichnen, um mit dem Argument nicht plötzlich um $\pm\pi$ danebenzuliegen.



Beispiel: Als Demonstration berechnen wir die Polarkoordinaten der vier dargestellten Punkte:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4} \\ \varphi_2 &= \arctan\left(\frac{-1}{1}\right) = -\frac{\pi}{4} \\ \varphi_3 &= \arctan\left(\frac{1}{-1}\right) = -\frac{\pi}{4}? \\ \varphi_4 &= \arctan\left(\frac{-1}{-1}\right) = \frac{\pi}{4}? \end{aligned}$$



Wenn es nach dem gehen würde, was die meisten Taschenrechner ausspucken, hätten jeweils zwei Punkte die gleichen Polarkoordinaten, was aber wohl nicht sein kann. Des Rätsels Lösung liegt natürlich darin, dass für die letzten beiden Ergebnisse jeweils ein anderer Zweig des Arcustangens zu nehmen ist, man also noch π addieren bzw. subtrahieren muss. Die richtigen Ergebnisse sind also $\varphi_3 = \frac{3\pi}{4}$ und $\varphi_4 = -\frac{3\pi}{4}$.

Die Umrechnung von Polar- in kartesische Darstellung erfolgt natürlich wie gewohnt mittels $x = r \cos \varphi$ und $y = r \sin \varphi$. Mit der Eulerschen Formel

$$\boxed{e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi} \quad (1.1)$$

(über die im nächsten Kapitel noch einiges gesagt wird) erhalten wir weiter die Darstellungen

$$\begin{aligned} z &= x + iy = re^{i\varphi} = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \\ \bar{z} &= x - iy = re^{-i\varphi} = r(\cos \varphi - i \sin \varphi) \end{aligned}$$

und als Umkehrung

$$\begin{aligned} x &= \frac{z + \bar{z}}{2} = \frac{re^{i\varphi} + re^{-i\varphi}}{2} \\ y &= \frac{z - \bar{z}}{2i} = \frac{re^{i\varphi} - re^{-i\varphi}}{2i}. \end{aligned}$$

Wo liegt nun aber der große Vorteil von Polarkoordinaten? Wie sich mit Hilfe der Additionstheoreme für Winkelfunktionen leicht zeigen läßt, erhält man für Produkt und Quotient von $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ und $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ die Ausdrücke:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) \end{aligned}$$

Damit erhält man für Potenzen von komplexen Zahlen den Ausdruck

$$z^n = r^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$$

und für unimodulare Zahlen ($|z| = 1$) die Formel von Moivre:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi).$$

Aus ihr kann man, indem man verschiedene Werte für n einsetzt, die linke Seite ausmultipliziert und Real- und Imaginärteil vergleicht, diverse trigonometrische Identitäten gewinnen.

Beispiel: Für $n = 3$ erhalten wir:

$$\cos^3 \varphi + 3i \cos^2 \varphi \sin \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi - i \sin^3 \varphi = \cos(3\varphi) + i \sin(3\varphi)$$

und durch Vergleich von Real- und Imaginärteil:

$$\begin{aligned} \cos(3\varphi) &= \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi \\ \sin(3\varphi) &= 3 \cos^2 \varphi \sin \varphi - \sin^3 \varphi \end{aligned}$$

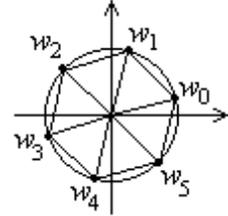
Wer also schon immer wissen wollte, woher die vielen Identitäten eigentlich stammen, die man in diversen Büchern findet, hier ist eine gute Adresse. Der Schluss, dass bei einer Gleichung mit komplexen Zahlen Real- und Imaginärteil auf beiden Seiten übereinstimmen müssen, wird übrigens auch in anderen Bereichen oft gebraucht und sollte daher im Hinterkopf behalten werden.

Nun können wir auch zu einem etwas heikleren Thema kommen, nämlich den Wurzeln komplexer Zahlen. Schon im Reellen ist Wurzelziehen oft nicht eindeutig, und im Komplexen ist es das noch viel weniger. Als n -te Wurzel w einer Zahl z bezeichnet man ja jene Zahl mit $w^n = z$. Setzt man jetzt an: $w = \rho(\cos \psi + i \sin \psi)$, so bedeutet das:

$$w^n = \rho^n(\cos n\psi + i \sin n\psi) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

und man erhält für den Betrag von w die reelle n -te Wurzel des Betrags von z , $\rho = \sqrt[n]{r}$. Das Argument ergibt sich zu $\psi_0 = \frac{\varphi}{n}$ — aber das ist noch nicht die ganze Wahrheit. Das Argument von z ist ja nur bis auf 2π genau bestimmt, also ist auch $\psi_1 = \frac{\varphi+2\pi}{n}$ eine gültige Wahl, und ebenso alle $\psi_k = \frac{\varphi+2\pi k}{n}$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Ab $k = n$ ergeben sich aber keine neuen Werte mehr, jede komplexe Zahl hat also n verschiedene n -te Wurzeln mit den Argumenten

$$\psi_k = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$



Diese bilden ein regelmäßiges n -Eck auf der Kreislinie $|w| = \sqrt[n]{r}$. Für $\varphi = \text{Arg } z$ und $k = 0$ spricht man vom Hauptwert der Wurzel.

Beispiel: Wir berechnen die fünften Wurzeln von $z = 32i$. Hier ist $r = 32$ und $\varphi = \frac{\pi}{2}$, für den Betrag der Wurzeln erhält man also $\rho = \sqrt[5]{32} = 2$ und weiter

$$w_k = 2 \left(\cos \left(\frac{\pi + 4\pi k}{10} \right) + i \sin \left(\frac{\pi + 4\pi k}{10} \right) \right), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Übrigens, für die Lösungsformel der quadratischen Gleichungen $az^2 + bz + c = 0$ erhält man den gleichen Ausdruck wie im Reellen (bei der Herleitung wird ja an keiner Stelle davon Gebrauch gemacht, dass man in \mathbb{R} rechnet),

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

und da sollte man dann wissen, wie man die Quadratwurzel von komplexen Zahlen zieht.

Beispiel: Für die Lösung der quadratischen Gleichung $z^2 - (1+i)z + i = 0$ erhält man

$$z_{1,2} = \frac{1+i}{2} \pm \sqrt{\frac{(1+i)^2}{4} - i} = \frac{1+i}{2} \pm \frac{\sqrt{-i}}{\sqrt{2}}$$

und, wenn man die Wurzel auswertet

$$\sqrt{-i} = \left(e^{-i\frac{\pi}{2}} \right)^{1/2} = e^{-i\frac{\pi}{4}} = \cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2},$$

also die Lösungen

$$z_{1,2} = \frac{1+i}{2} \pm \frac{1-i}{2} \quad z_1 = 1, \quad z_2 = i.$$

Hier braucht man nur den Hauptwert der Wurzel zu berücksichtigen, da die zweite Lösung bereits durch das \pm erfasst wird. (Man denke an $\cos(\varphi + \pi) = -\cos \varphi$ und $\sin(\varphi + \pi) = -\sin \varphi$.)

1.4 Teilmengen der komplexen Ebene

Wir kommen nun zur Beschreibung von Teilmengen der komplexen Ebene. Dazu ist am Anfang zu sagen, dass \mathbb{C} mit der Abstandsdefinition $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$ zu einem metrischen Raum wird, alle dafür erklärten Begriffe gelten also auch in \mathbb{C} . Die wichtigsten werden hier noch einmal kurz wiederholt:

- So ist die Epsilon-Umgebung eines Punktes z_0 die Menge $U_\varepsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \varepsilon\}$.
- Eine Menge $M \subset \mathbb{C}$ heißt offen, wenn es zu jedem $z \in M$ ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $U_\varepsilon(z)$ ganz in M liegt.
- Dagegen ist $M \subset \mathbb{C}$ abgeschlossen, wenn $\mathbb{C} \setminus M$ offen ist. Offenheit und Abgeschlossenheit schließen einander nicht unbedingt aus.
- M ist beschränkt, wenn es ein $R \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $|z| < R$ für alle $z \in M$ ist.
- Genau dann wenn eine Menge beschränkt und abgeschlossen ist, ist sie kompakt (Satz von Heine-Borel).

Besonders angenehm in \mathbb{C} ist, dass sich viele Teilmengen mit Begriffen wie dem Betrag, Re oder Im sehr einfach beschreiben lassen. So ist etwa $\{z \mid \operatorname{Re} z > 0\}$ die offene rechte Halbebene oder $\{z \mid z = \bar{z}\}$ die reelle Achse.

Häufig stößt man auch auf Ausdrücke $|z - z_0| < r$. Setzt man dort die Definition des Betrages ein, erhält man $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r$ und nach Ausquadrieren (was ja erlaubt ist, weil beide Seiten positiv sind):

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2.$$

Es handelt sich also um eine offene Kreisscheibe mit Mittelpunkt $z_0 = x_0 + iy_0$ und Radius r . Natürlich lassen sich auf ähnlichem Weg auch kompliziertere Teilmengen beschreiben, andererseits können sich hinter gefährlich wirkenden Ausdrücke völlig harmlose Mengen verbergen.

Beispiel: Wir untersuchen die Menge $M = \{z \mid \operatorname{Re} \frac{1}{z} > 0\}$ und erhalten

$$\operatorname{Re} \frac{1}{z} = \operatorname{Re} \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \operatorname{Re} \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} > 0 \iff \operatorname{Re} z > 0,$$

es handelt sich also wieder um die rechte Halbebene.

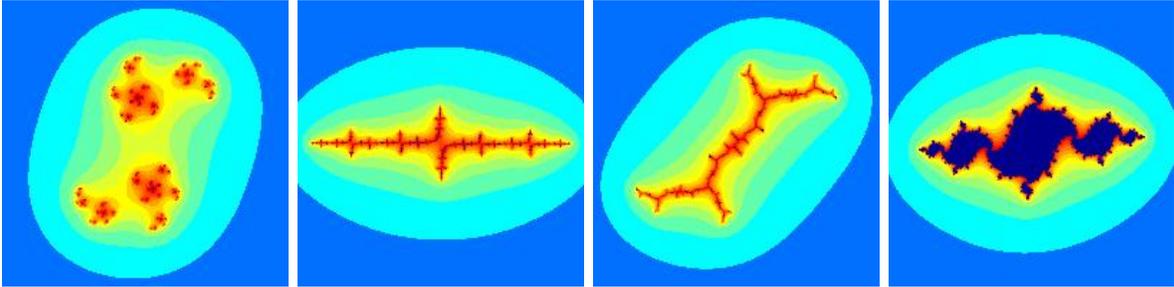
Beispiel: Welche Punktmenge wird durch $|\frac{z-3}{z+3}| > 2$ beschrieben? Wir formen um:

$$\begin{aligned} |z - 3| &> 2|z + 3| \\ (x - 3)^2 + y^2 &> 4((x + 3)^2 + y^2) \\ 3x^2 + 30x + 3y^2 + 27 &< 0 \\ (x + 5)^2 + y^2 &< 16 \end{aligned}$$

Es handelt sich also um das Innere eines Kreises mit Mittelpunkt $z_0 = -5$ und Radius $r = 4$.

Als kleines Beispiel, wie bizarr derartige Teilmengen von \mathbb{C} sein können, behandeln wir in einem kleinen Exkurs ein Thema, das eigentlich nicht zum Stoff der Funktionentheorie gehört, aber eng mit den komplexen Zahlen verknüpft ist:

Wir wählen eine beliebige komplexe Zahl c , sie wollen wir im folgenden konstant halten. Nun bilden wir für jedes $z \in \mathbb{C}$ die Folge $z, z^2 + c, (z^2 + c)^2 + c$, also $z_0 = z, z_{n+1} = z_n^2 + c$. Je nach Wahl von c und abhängig von z kann diese Folge betragsmäßig divergieren ($|z_n| \rightarrow \infty$) oder auch nicht. Alle Punkte, für die der Betrag im Limes $n \rightarrow \infty$ konvergiert, färben wir nun z.B. schwarz ein, sie sollen zu unserer Menge J_c gehören. Allen anderen Punkten geben wir je nach Geschwindigkeit der Divergenz andere Farben. Dann erhalten wir für jeden c -Wert ein eigenes Bild, das sich mittels Computern näherungsweise berechnen läßt. Einige Beispiele sind (gezeigt ist jeweils das Rechteck zwischen $-2 - 2i$ und $2 + 2i$):



Die Mengen J_c nennt man Julia-Mengen, sie sind Musterbeispiele für Fraktale. Derartige Objekte werden beispielsweise in der Computergraphik zur Bilderzeugung oder -kompression verwendet, an dieser Stelle können wir leider nicht weiter auf dieses Thema eingehen.

1.5 Charakterisierung von Mengen

Schon im vorangegangenen Abschnitt haben wir Teilmengen der komplexen Ebene behandelt, nun kommen wir zu ihrer genaueren Charakterisierung mit Hilfe topologischer Begriffe:

Ganz grob gesprochen heißt eine Menge M zusammenhängend, wenn sie nur „aus einem Stück“ besteht. Jene Mengen, die sowohl offen als auch zusammenhängend sind, nennt man *Gebiete*. Tatsächlich sind die Gebiete jene Mengen, die man innerhalb der Funktionentheorie wohl am öftesten betrachtet.



M zusammenhängend



M nicht zusammenhängend

Hat ein Gebiet zudem auch keine Löcher im Inneren, so nennt man es *einfach zusammenhängend*. Besteht der Rand hingegen aus n jeweils geschlossenen Kurven, so heißt es n -fach zusammenhängend. Insbesondere einfach zusammenhängende Gebiete werden uns des öfteren begegnen.

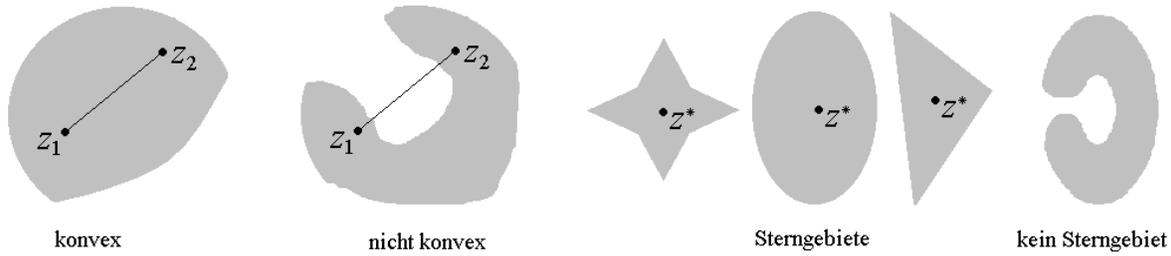


einfach zusammenhängend



nicht einf. zusammenhängend

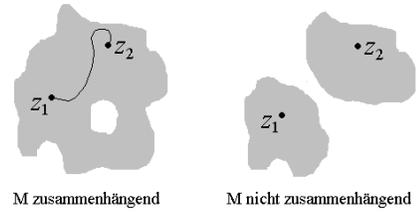
Noch stärkere, das heißt weiter einschränkende Eigenschaften sind Konvexität und Sternförmigkeit. Eine Menge $M \in \mathbb{C}$ heißt *konvex*, wenn für alle $z_1, z_2 \in M$ die Verbindungsstrecke $z(t) = z_1 + (z_2 - z_1)t, t \in [0, 1]$ ganz in M liegt. Gibt es zumindest einen Sternmittelpunkt z^* , so dass die Verbindungsstrecken zwischen z^* und allen $z \in M$ ganz in M liegen, spricht man von einem Sterngebiet.



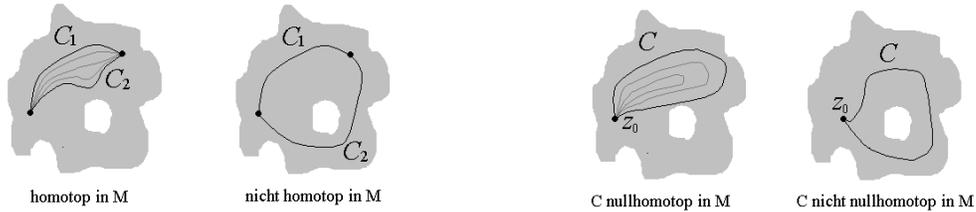
Klarerweise ist jedes konvexe Gebiet auch ein Sterngebiet, und jeder Punkt ist ein möglicher Sternmittelpunkt. Ebenso klar ist aber auch, dass die Umkehrung nicht gilt.

An dieser Stelle eine kleine Anmerkung: Die Beschreibung von zusammenhängenden und einfach zusammenhängenden Gebieten, die wir hier gebracht haben, ist zwar anschaulich klar, aber weit entfernt von mathematischer Exaktheit. Diese Lücke wollen wir hier zumindest ansatzweise schließen.

Um die Begriffe exakt definieren zu können, müssen wir uns aber zuerst noch ein wenig mit Kurven befassen. Unter einer Kurve verstehen wir eine Abbildung $C : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto z(t) = x(t) + iy(t)$, wobei $x(t)$ und $y(t)$ hier stetige Funktionen des reellen Parameters t sein sollen. (Genauer werden wir in Abschnitt 3.2 sagen, hier sind Kurven nur ein Hilfsmittel, um anschaulich völlig klare Begriffe genauer zu formulieren.) Eine Menge M ist nun zusammenhängend, wenn es zu allen Punkten $z_1, z_2 \in M$ immer eine Kurve C gibt, die diese beiden verbindet und deren Bild $C^* = \{z \in \mathbb{C} | z = z(t), t \in [a, b]\}$ ganz in M liegt.

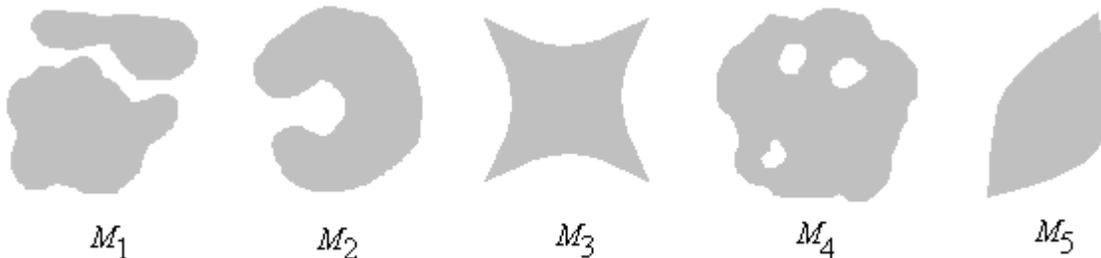


Zwei Kurven $C_1: z_1(t)$ und $C_2: z_2(t)$ mit $t \in [a, b]$ sind in M homotop, wenn sie sich stetig ineinander überführen lassen, wobei alle auftretenden „Zwischenkurven“ ganz in M liegen. (Genauer: Sie sind homotop, wenn es eine stetige Funktion $F(s, t)$ gibt, so dass $F(0, t) = z_1(t)$ und $F(1, t) = z_2(t)$ für alle $t \in [a, b]$.) Eine geschlossene Kurve (Anfangspunkt = Endpunkt = z_0) nennt man nullhomotop, wenn sie homotop zur konstanten „Kurve“ $z = z_0$ ist, sich also auf einen Punkt zusammenziehen läßt.



Nun können wir schon wesentlich exakter definieren: Ein Gebiet M ist dann einfach zusammenhängend, wenn darin *jede* geschlossene Kurve nullhomotop ist. Damit ist natürlich auch wieder zum Ausdruck gebracht, dass es in M keine Löcher geben darf.

Beispiel: Wir charakterisieren nun die folgenden fünf offenen Mengen:



Am übersichtlichsten erfolgt das in Form einer Tabelle:

Menge	Gebiet	einf. zus.-hängend	Sterngebiet	konvex
M_1	Nein	Nein	Nein	Nein
M_2	Ja	Ja	Nein	Nein
M_3	Ja	Ja	Ja	Nein
M_4	Ja	Nein	Nein	Nein
M_5	Ja	Ja	Ja	Ja

Da alle konvexen Gebiete auch Sterngebiete sind, ebenso alle Sterngebiete einfach zusammenhängend und einfach zusammenhängende Gebiete natürlich Gebiete, muss in dieser Tabelle rechts von einem Nein ebenfalls ein Nein stehen, und links von einem Ja ebenfalls ein Ja. Daher gibt man meist nur den weitestreichenden Begriff an: M_1 ist also nicht zusammenhängend, M_2 einfach zusammenhängend, M_3 ein Sterngebiet, M_4 ein Gebiet und M_5 ein konvexes Gebiet.

1.6 Übungsaufgaben

1. Man berechne für a) $z_1 = 1 + i$ und $z_2 = -2 + i$, b) $z_1 = 2 - i$ und $z_2 = 3 - 2i$, c) $z_1 = 3 - 2i$ und $z_2 = 3 + 2i$ die Ausdrücke $z_1 + z_2$, $z_1 z_2$, $z_1 - z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$ und $z_1^2 - z_2^2$.

Für a) erhält man die Ergebnisse

$$\begin{aligned}
 z_1 + z_2 &= 1 + i - 2 + i = -1 + 2i \\
 z_1 \cdot z_2 &= (1 + i)(-2 + i) = -2 + i - 2i - 1 = -3 - i \\
 z_1 - z_2 &= 1 + i + 2 - i = 3 \\
 \frac{z_1}{z_2} &= \frac{1+i}{-2+i} = \frac{(1+i)(-2-i)}{|-2+i|^2} = \frac{-2-i-2i+1}{5} = -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i \\
 z_1^2 - z_2^2 &= (1+i)^2 - (-2+i)^2 = 1 + 2i - 1 - (4 - 4i - 1) = -3 + 6i
 \end{aligned}$$

2. Man berechne für a) $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$ und $z_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}} - i$, b) $z_1 = 1 - i$ und $z_2 = i$, c) $z_1 = \sqrt{6} + \sqrt{2}i$ und $z_2 = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}i$ jeweils $|z_1|$, $\text{Arg } z_1$, $|z_2|$, $\text{Arg } z_2$, $|z_1 z_2|$, $\text{Arg}(z_1 z_2)$, $|\frac{z_1}{z_2}|$ und $\text{Arg}(\frac{z_1}{z_2})$.

Im Fall a) erhält man (man achte bei den Argumenten auf den richtigen Quadranten und darauf, ob wirklich der Hauptwert vorliegt):

$$\begin{aligned}
 |z_1| &= \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2, & \text{Arg } z_1 &= \text{Arctan} \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3} \\
 |z_2| &= \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} & \text{Arg } z_2 &= \text{Arctan} \frac{-1}{-1/\sqrt{3}} - \pi = \frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{2\pi}{3} \\
 |z_1 z_2| &= |z_1| \cdot |z_2| = \frac{4}{\sqrt{3}} & \arg(z_1 z_2) &= \text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2 = -\frac{\pi}{3} \stackrel{\text{hier}}{=} \text{Arg}(z_1 z_2) \\
 \left|\frac{z_1}{z_2}\right| &= \frac{|z_1|}{|z_2|} = \sqrt{3} & \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) &= \text{Arg } z_1 - \text{Arg } z_2 = \pi \stackrel{\text{hier}}{=} \text{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)
 \end{aligned}$$

3. Man berechne z_1^{10} , z_2^8 und $z_1^5 z_2^4$ für die Zahlen a) $z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$ und $z_2 = 1 - i$, b) $z_1 = 1 + i$ und $z_2 = -2 - 2i$, c) $z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{6}i$ und $z_2 = -1 + \sqrt{3}i$

Für derartige Rechnungen ist es vorteilhaft, mit Polarkoordinaten zu arbeiten, und dazu berechnen wir zuerst (für a)) $|z_1| = 2$, $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$, $|z_2| = \sqrt{2}$ und $\varphi_2 = -\frac{\pi}{4}$. Nun erhalten wir (man erinnere sich an $e^{i\varphi \pm 2\pi i} = e^{i\varphi}$):

$$\begin{aligned} z_1^{10} &= 2^{10} e^{i\frac{10\pi}{4}} = 2^{10} e^{i\frac{\pi}{2}} = 1024i \\ z_2^8 &= (\sqrt{2})^8 e^{-i\frac{8\pi}{4}} = 16e^{-i2\pi} = 16e^0 = 16 \\ z_1^5 z_2^4 &= 2^5 (\sqrt{2})^4 e^{i\frac{5\pi}{4}} e^{-i\frac{4\pi}{4}} = 128 e^{i\frac{5\pi-4\pi}{4}} = 128 e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{128}{\sqrt{2}}(1+i). \end{aligned}$$

Wer Zeit und Lust hat, kann ja ausprobieren, wieviel Aufwand es ist, die Produkte ohne Polardarstellung durch direktes Ausmultiplizieren oder mit dem binomischen Satz zu berechnen...

4. Man finde alle Zahlen w , für die gilt a) $w^5 = -32$, b) $w^8 = 256$, c) $w^3 = -27i$ und skizziere sie in der komplexen Ebene. Welche Werte sind dabei reell?

$z = -32$ hat fünf komplexe Wurzeln w_k ($k = 0, 1, 2, 3, 4$) mit dem Betrag $|w_k| = \sqrt[5]{32} = 2$. Bei der Berechnung des Arguments erhalten wir zunächst $\text{Arg } z = \pi$ und daher weiter $\text{Arg } w_k = \frac{\pi + 2\pi k}{5}$. Die Wurzeln von -32 sind also

$$w_k = 2 \left(\cos \frac{\pi + 2\pi k}{5} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{5} \right).$$

Reell ist dabei nur $w_2 = 2(\cos \pi + i \sin \pi) = -2$.

5. Man beweise mit Hilfe der Formel von Moivre die folgenden Identitäten:

- a) $\cos 5\varphi = 16 \cos^5 \varphi - 20 \cos^3 \varphi + 5 \cos \varphi$,
 b) $\cos 4\varphi = 8 \cos^4 \varphi - 8 \cos^2 \varphi + 1$,
 c) $\cos 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi$ und $\sin 2\varphi = 2 \cos \varphi \sin \varphi$

- a) Für $n = 5$ lautet die Formel von Moivre

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^5 = \cos 5\varphi + i \sin 5\varphi.$$

Durch Ausmultiplizieren der linken Seite erhält man

$$\cos^5 \varphi + 5i \cos^4 \varphi \sin \varphi - 10 \cos^3 \varphi \sin^2 \varphi - 10i \cos^2 \varphi \sin^3 \varphi + 5 \cos \varphi \sin^4 \varphi + 5i \sin^5 \varphi,$$

und der Realteil dieses Ausdrucks muss gleich $\cos 5\varphi$ sein. Mit der Identität $\sin^2 \varphi = 1 - \cos^2 \varphi$ erhält man:

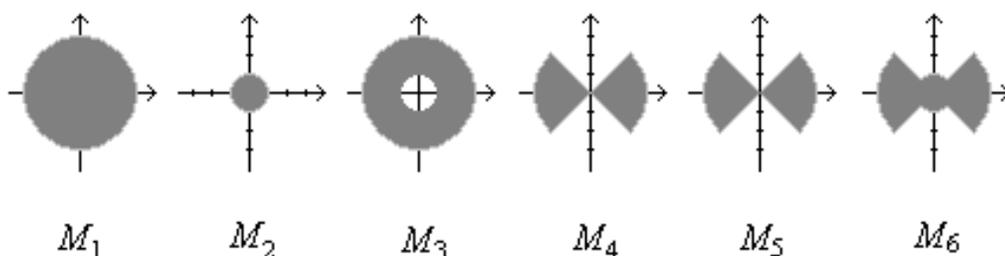
$$\begin{aligned} \cos 5\varphi &= \cos^5 \varphi - 10 \cos^3 \varphi \sin^2 \varphi + 5 \cos \varphi \sin^4 \varphi \\ &= \cos^5 \varphi - 10 \cos^3 \varphi (1 - \cos^2 \varphi) + 5 \cos \varphi (1 - 2 \cos^2 \varphi + \cos^4 \varphi) \\ &= 16 \cos^5 \varphi - 20 \cos^3 \varphi + 5 \cos \varphi. \end{aligned}$$

6. Man skizziere die folgenden Teilmengen der komplexen Ebene:

- a) $M_1 = \{z \mid |z| < 3\}$, $M_2 = \{z \mid |z| < 1\}$, $M_3 = M_1 \setminus M_2$, $M_4 = \{z \in M_1 \mid |\operatorname{Arg} z| < \frac{\pi}{4} \vee |\operatorname{Arg} z| > \frac{3\pi}{4}\}$, $M_5 = M_4 \cup \{0\}$ und $M_6 = M_4 \cup M_2$.
- b) $M_1 = \{z \mid |z - 3i| < 2\}$, $M_2 = \{z \mid |z + 3i| < 2\}$, $M_3 = \{z \mid |z| < 3\}$, $M_4 = M_3 \cap (M_1 \cup M_2)$, $M_5 = M_3 \setminus (M_1 \cup M_2)$ und $M_6 = M_3 \cup (M_1 \cup M_2)$
- c) $M_1 = \{z \mid |z - 3| + |z + 3| < 10\}$, $M_2 = \{z \mid 1 < |z| < 3\}$, $M_3 = \{z \mid 4 \leq |z| \leq 5\}$, $M_4 = M_1 \setminus M_2$, $M_5 = M_1 \cup M_3$, $M_6 = M_1 \setminus M_3$

Weiters gebe man an, ob es sich um Gebiete (und wenn ja um welche) handelt.

Die Mengen M_1 bis M_6 aus a) sind im folgenden skizziert. Der Nullpunkt $z = 0$ ist zwar ein Element von M_5 , nicht aber von M_4 .



M_1 und M_2 sind beide konvexe Gebiete. M_3 ist zusammenhängend, aber kein Gebiet, weil es nicht offen ist (Kreislinie $|z| = 1$). M_4 ist zwar offen, aber nicht zusammenhängend, also ebenfalls kein Gebiet. Nimmt man, wie in M_5 , den Nullpunkt dazu, ist die Menge zwar zusammenhängend (und $z = 0$ ist sogar ein Sternpunkt), aber dafür ist sie nicht mehr offen, M_5 ist also ebenfalls kein Gebiet. Dafür ist M_6 offen und zusammenhängend, also ein Gebiet, genauer sogar ein Sterngebiet mit dem Sternmittelpunkt $z^* = 0$.

7. Man zeige, dass $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ tatsächlich ein Körper ist.
8. Man zeige, dass \mathbb{C} ein Vektorraum a) über \mathbb{R} , b) über \mathbb{C} ist.
9. Man beweise die Identitäten $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$, $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, $\bar{\bar{z}} = z$, $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ und $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.
10. a) Es sei $P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten a_k . Man beweise: Ist z_0 eine Nullstelle von P , so ist auch \bar{z}_0 eine Nullstelle. Welche Folgerungen ergeben sich daraus?
 b) $P(z) = z^4 + z^3 - 5z^2 + z - 6$ hat die Nullstelle $z_1 = +i$. Man finde die übrigen drei Nullstellen des Polynoms.
11. Man zeige, dass das Einheitsquadrat $E_2 = \{z = x + iy \mid x, y \in (0, 1)\}$ von der gleichen Mächtigkeit ist wie das Einheitsintervall $E_1 = (0, 1)$. (Hinweis: Man konstruiere eine bijektive Abbildung $E_1 \leftrightarrow E_2$).

Kapitel 2

Komplexe Differenzierbarkeit

Wenn man mit komplexen Zahlen rechnet, dann ist es früher oder später naheliegend, auch Funktionen $f(z)$ zu betrachten, die von \mathbb{C} wieder nach \mathbb{C} abbilden: komplexwertige Funktionen einer komplexen Variablen oder kurz (und etwas schlampig) komplexe Funktionen.

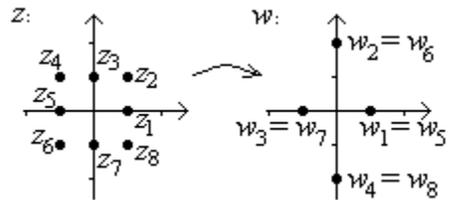
Die meisten elementaren Funktionen lassen sich ohne größere Schwierigkeiten ins Komplexe übertragen, auch wenn man dabei leider einige liebgewonnene Rechenregeln über Bord werfen muss. Wirklich interessant wird es aber, wenn man versucht, die Differenzierbarkeit für solche komplexen Funktionen zu definieren.

Es zeigt sich, dass die komplex differenzierbaren Funktionen besonders schöne, ja teils erstaunliche Eigenschaften haben. Viele dieser Besonderheiten werden allerdings erst im Zusammenhang mit komplexen Kurvenintegralen sichtbar – Differenzierbarkeit und Kurvenintegrale stellen demnach das Fundament der komplexen Analysis dar.

2.1 Allgemeines zu komplexen Funktionen

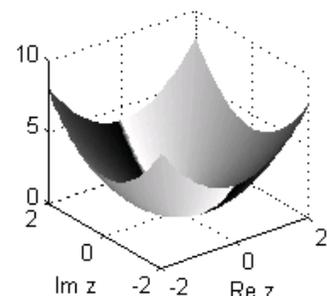
Eine komplexe Funktion ist eine Abbildung $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto w = f(z)$, man sagt auch, die z -Ebene wird in die w -Ebene abgebildet (rechts für $w = z^2$ dargestellt).

Etliche Eigenschaften komplexer Funktionen folgen schon aus der allgemeinen Tatsache, dass man in den komplexen Zahlen mittels $d(z, w) = |z - w|$ einen Abstand erklären kann, \mathbb{C} damit also ein metrischer Raum ist.



So läßt sich etwa der Grenzwert einer Funktion definieren: $G = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$, wenn für alle Folgen $\{z_n\}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$ und $z_n \neq z_0$ jeweils $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = G$ ist. (Eine Folge $\{z_n\}$ konvergiert übrigens genau dann gegen z_0 , wenn $x_n \rightarrow x_0$ und $y_n \rightarrow y_0$ geht.) Wie im Reellen ist eine Funktion f stetig, wenn $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ ist.

Im Gegensatz zum reellen Fall $y = f(x)$ lassen sich komplexe Funktionen leider nicht mehr so einfach in einem Graphen darstellen. Man hat aber zum Beispiel noch die Möglichkeit, den Betrag $|f(x, y)|$ als Funktion von x und y zu plotten und das Argument (die Phase) durch die Farbe zu berücksichtigen. Im den folgenden Darstellungen entspricht Schwarz dem Wert $\text{Arg } z = -\pi$, für wachsende Argumente wird die geplottete Fläche immer heller und für $\text{Arg } z = \pi$ ist sie weiß. Rechts ist das für die Funktion $f(z) = z^2$ gezeigt.



Jede Funktion von $z = x + iy$ läßt sich sowohl als Funktion der reellen, voneinander unabhängigen Variablen x und y als auch als Funktion der komplexen, voneinander abhängigen Größen z und $\bar{z} = x - iy$ schreiben. Je nach Anwendung mag eine der beiden Darstellungen günstiger sein, der Übergang kann auf jeden Fall mit

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy \quad x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

erfolgen, oft lassen sich aber sogar noch einfachere Wege finden.

Beispiel: Wir wollen die Funktion $f = x^3 + xy^2$ auf die Argumente z und \bar{z} umschreiben. Dazu erinnern wir uns an $|z|^2 = z\bar{z} = x^2 + y^2$ und erhalten:

$$f = x^3 + xy^2 = x(x^2 + y^2) = x \cdot z\bar{z} = \frac{z + \bar{z}}{2} z\bar{z} = \frac{1}{2}(z^2\bar{z} + z\bar{z}^2).$$

Beispiel: Auch in die andere Richtung funktioniert natürlich das Umschreiben: Für $f = z^2\bar{z}$ erhalten wir:

$$f = z^2\bar{z} = z \cdot z\bar{z} = (x + iy)(x^2 + y^2) = x^3 + xy^2 + ix^2y + iy^3.$$

An dieser Stelle noch schnell eine Warnung. Weil die gleiche Funktion dargestellt wird, verwendet man für $f(x, y)$ und $f(z, \bar{z})$ oft das gleiche Symbol, nämlich f . Die funktionale x - y -Abhängigkeit von f ist aber im allgemeinen eine andere als die z - \bar{z} -Abhängigkeit, weshalb es beim Anschreiben von Argumenten sicherer ist, verschiedene Symbole (z.B. $f(x, y)$ und $\tilde{f}(z, \bar{z})$) zu verwenden, um Mißverständnissen vorzubeugen.

2.2 Exponential- und Winkelfunktionen

Einige elementare Funktionen wie Wurzeln und Potenzen tauchen schon bei der Beschäftigung mit komplexen Zahlen auf. Wir wollen nun darangehen, auch die Funktionen e^x , $\sin x$ und $\cos x$ ins Komplexe zu übertragen. Am schnellsten geht das, indem man einfach die Potenzreihenentwicklung auf beliebig komplexe z verallgemeinert, man definiert also:

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \quad \sin z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \quad \cos z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \quad (2.1)$$

Wie im Reellen definiert man weiters $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$ und $\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$.

Später wird sich zeigen, dass diese Verallgemeinerung auf komplexe Argumente (die man natürlich außer mittels Potenzreihen auch auf anderen Wegen einführen kann) die einzig mögliche ist, wenn e^z , $\sin z$ und $\cos z$ auf \mathbb{C} komplex differenzierbar sein sollen.

Im Gegensatz zum Reellen gibt es im Komplexen auch Zahlen z mit $|\sin z| > 1$ oder $|\cos z| > 1$ und die Exponentialfunktion kann auch negative Werte annehmen (aber weiterhin nicht Null werden). Auf jeden Fall aber gelten die folgenden Funktionalgleichungen (für alle komplexen z , w und alle reellen x, y):

- Wie auch im Reellen gilt $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$, wie sich leicht durch Einsetzen in die Potenzreihendarstellung zeigen läßt. Allerdings ist im allgemeinen $(e^z)^w \neq e^{zw}$. Ist w allerdings eine ganze Zahl, so bleibt die aus dem Reellen bekannte Beziehung gültig, $(e^z)^n = e^{nz}$

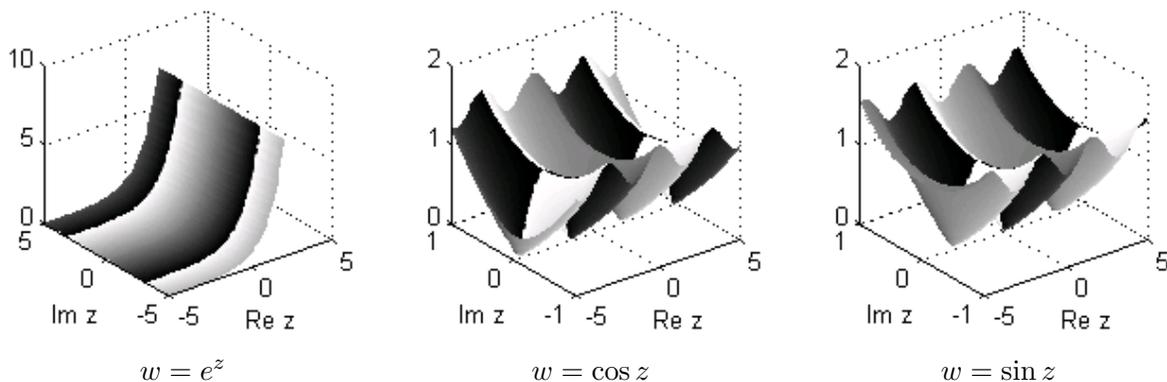
- Es ist $e^{iz} = \cos z + i \sin z$, insbesondere ist $e^{iy} = \cos y + i \sin y$ für reelle y . Daraus folgt $|e^{iy}| = \cos^2 y + \sin^2 y = 1$.
- Mit den beiden oberen Eigenschaften folgt weiter $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$. Daraus ergibt sich unmittelbar: $e^{z+2\pi i} = e^z$. (e^z ist $2\pi i$ -periodisch.)
- Klarerweise lassen sich auch die trigonometrischen Funktionen durch die Exponentialfunktion darstellen: $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$ und $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$.
- Wie im Reellen gelten die Additionstheoreme

$$\begin{aligned}\cos(z \pm w) &= \cos z \cos w \mp \sin z \sin w \\ \sin(z \pm w) &= \sin z \cos w \pm \cos z \sin w\end{aligned}$$

- Außerdem ist nach wie vor $\cos(z + 2\pi) = \cos z$ und analog für Sinus, weiters $\cos(-z) = \cos(z)$ und $\sin(-z) = -\sin(z)$, zudem gilt $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$.
- Definiert man wie im Reellen die hyperbolischen Funktionen mit $\cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$; $\sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$, so gilt $\cosh iz = \cos z$ und $\sinh iz = i \sin z$ sowie $\cos iz = \cosh z$ und $\sin iz = i \sinh z$. Außerdem ist allgemein $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$.
- Damit kann man die trigonometrischen Funktionen in Real- und Imaginärteil auftrennen, man erhält dabei ($z = x + iy$):

$$\begin{aligned}\cos(z) &= \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y \\ \sin(z) &= \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y\end{aligned}$$

Zum Abschluss kommen wir noch zur graphischen Darstellung der drei Funktionen; sie erfolgt wie im ersten Abschnitt beschrieben:

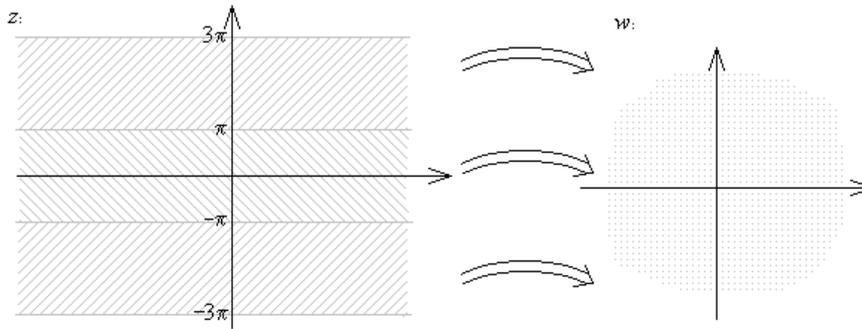


2.3 Logarithmus, Arcus- und Areefunktionen

Die Exponentialfunktion bildet jeweils einen Streifen

$$\{z = x + iy \mid x \in \mathbb{R}, (2k - 1)\pi < y \leq (2k + 1)\pi\}$$

bijektiv in die komplexe Ebene ohne den Nullpunkt, $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, ab.



Daher muss es für jeden dieser Streifen auch eine Umkehrfunktion geben, die wir mit $z = \log_k w$ bezeichnen wollen. Für $k = 0$ und $w \in \mathbb{R}^+$ muss sie selbstverständlich mit dem reellen (natürlichen) Logarithmus $\ln w$ übereinstimmen. (Vorsicht: Den Index k läßt man in vielen Fällen weg, $z = \log w$, aber auch der reelle Zehnerlogarithmus wird – gerade in Schulbüchern – oft mit \log bezeichnet. Bitte die beiden nicht verwechseln.)

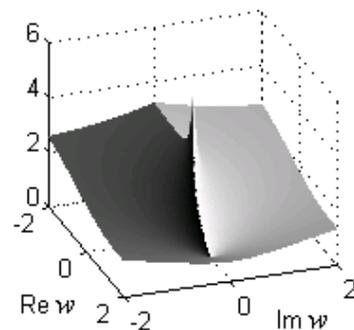
Wie man durch Einsetzen leicht überprüfen kann, gilt:

$$z = \log_k w = \ln |w| + i \arg_k w. \quad (2.2)$$

Besonders wichtig ist dabei der Fall $k = 0$, man spricht dann vom “Fundamentalstreifen“ $\{z = x + iy \mid x \in \mathbb{R}, -\pi < y \leq \pi\}$ und vom *Hauptwert* des Logarithmus, der meist mit einem großen L geschrieben wird:

$$z = \text{Log } w = \ln |w| + i \text{Arg } w. \quad (2.3)$$

Diese Funktion ist rechts dargestellt (man beachte, dass das Bild gegenüber den bisher gezeigten gedreht ist, um die Besonderheiten des komplexen Logarithmus besser zu zeigen). Deutlich erkennbar sind die Nullstelle bei $w = 1$ und der Pol (Singularität) bei $w = 0$. Was noch zu sagen wäre: $\log_k w$ ist für beliebige k auf \mathbb{R}^- unstetig und bei $w = 0$ nicht einmal definiert. Beliebige Logarithmen \log_k kann man über $\log_k w = \text{Log } w + 2\pi i k$ stets auf den Hauptwert umschreiben.



Auch wenn der komplexe Logarithmus viele Eigenschaften des reellen \ln hat, so gelten doch manche praktischen Zusammenhänge nicht mehr. So ist etwa im allgemeinen $\text{Log}(zw) \neq \text{Log } z + \text{Log } w$. Ein derartiger Zusammenhang gilt nur mehr in abgeschwächter Form: Es gibt nämlich stets ein $k \in \mathbb{Z}$, für das $\text{Log}(zw) = \text{Log } z + \text{Log } w + 2\pi i k$ ist.

Die Mehrdeutigkeit des Logarithmus überträgt sich auch auf die allgemeine Potenzfunktion

$$z^b := e^{b \log z}. \quad (2.4)$$

Nur wenn b eine ganze Zahl ist, wird z^b eindeutig und fällt mit dem Hauptwert $e^{b \text{Log } z}$ zusammen. Für $b = \frac{1}{n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ gibt es nur n verschiedene Werte, die n -ten Wurzeln.

So wie zur Exponentialfunktion lassen sich natürlich auch zu Winkel- und Hyperbelfunktionen entsprechende Umkehrfunktionen finden. Allen diesen Funktionen ist gemeinsam, dass sie

sich durch den Logarithmus ausdrücken lassen, also ebenfalls mehrdeutig sind:

$$\begin{aligned} z = \arcsin w &= -i \log \left(iw \pm \sqrt{1 - w^2} \right) & z = \arccos w &= -i \log \left(w \pm \sqrt{w^2 - 1} \right) \\ z = \arctan w &= \frac{i}{2} \log \frac{i+w}{i-w} & z = \operatorname{arccot} w &= \frac{i}{2} \log \frac{i-w}{i+w} \\ z = \operatorname{arsinh} w &= \log \left(w \pm \sqrt{w^2 + 1} \right) & z = \operatorname{arcosh} w &= \log \left(w \pm \sqrt{w^2 - 1} \right) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Nimmt man in diesen Ausdrücken jeweils den Hauptwert des Logarithmus und das positive Vorzeichen, so erhält man den jeweiligen Hauptwert, der ebenfalls mit einem großen Anfangsbuchstaben angedeutet wird, also z.B. $\operatorname{Arcsin} w = -i \operatorname{Log} (iw + \sqrt{1 - w^2})$.

2.4 Komplexe Differenzierbarkeit

Wir gehen nun daran, die Differenzierbarkeit auch für Funktionen $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ zu definieren. Wer bereits mehr über Abbildungen $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ weiß, mag sich wundern, was dabei überhaupt noch zu tun bleibt. Da die komplexe Ebene dem \mathbb{R}^2 entspricht, sind doch komplexwertige Funktionen einer komplexen Variablen simple Abbildungen $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, und für solche ist die Ableitung doch bereits in der reellen Analysis mehrerer Variabler definiert worden.

Das stimmt natürlich, aber um die Ableitung einer solchen Funktion zu charakterisieren braucht man bereits eine 2×2 -Matrix der partiellen Ableitungen. Oft hätte man aber gern die Ableitung einer komplexen Funktion f an einem Punkt z_0 durch eine einzige Zahl $f'(z_0)$ charakterisiert – wie eben auch im Reellen. Um das zu erreichen, verschärft man die Anforderungen an die komplexe Ableitung und definiert:

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}. \quad (2.6)$$

Dabei kommen natürlich alle Tücken der Grenzwerte in mehreren Variablen zum Tragen. Auch wenn eine Funktion $(u(x, y), v(x, y))$ reell durchaus total differenzierbar ist, muss deshalb die Ableitung von $f = u + iv$ im strengeren komplexen Sinne noch keineswegs existieren. Tatsächlich werden durch diese Definition gerade jene Funktionen mit besonders schönen Eigenschaften „herausgepickt“, und genau davon handelt die Disziplin der Funktionentheorie.

Beispiel: Wir untersuchen zunächst die Funktion $f(z) = z^2$. Im reellen Sinne sind beide problemlos differenzierbar: $(x^2 - y^2, 2xy)$ macht als Abbildungen $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ nicht die geringsten Probleme. Sehen wir uns die Sache aber einmal im Komplexen an (wir setzen dabei $h = z - z_0$):

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(z_0 + h)^2 - z_0^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{z_0^2 + 2hz_0 + h^2 - z_0^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2z_0 + h = 2z_0.$$

In diesem Beispiel, und das ist der springende Punkt, ist es völlig egal, aus welcher Richtung die *komplexe* Variable h gegen Null (und damit z gegen z_0) geht, der Grenzwert existiert also, und wir erhalten wie im Reellen $(z^2)' = 2z$.

Es zeigt sich, dass die elementaren Funktionen (wie Polynome, e^z , $\sin z$, $\cos z$, ...) komplex differenzierbar sind, und sich ihre Ableitungsregeln Eins-zu-Eins aus dem Reellen übertragen lassen. (Lediglich bei Funktionen wie $\log z$ oder Wurzeln ist an manchen Punkten eine gewisse Vorsicht geboten – man denke an Definitionslücken und Unstetigkeitsstellen). Ebenso bleiben Produkt-, Ketten- und Quotientenregel gültig, wie sich mittels Grenzwertbildung leicht nachweisen läßt.

Nicht oder nur an einzelnen Punkten komplex differenzierbar sind hingegen Funktionen wie \bar{z} , $|z|$ oder $\operatorname{Re} z$.

Beispiel: Sehen wir uns etwa $g(z) = \bar{z}$ an. Grenzwertbildung liefert:

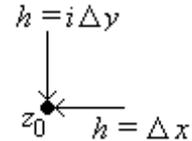
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(z_0 + h) - g(z_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overline{z_0 + h} - \bar{z}_0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{z}_0 + \bar{h} - \bar{z}_0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{h}}{h}.$$

Hier hängt das Ergebnis wesentlich davon ab, wie wir h ansetzen. Wählen wir h reell, $h = \Delta x$, nähern uns also z_0 parallel zur reellen Achse, so erhalten wir:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Mit imaginärem h hingegen, $h = i\Delta y$, folgt:

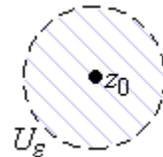
$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\overline{i\Delta y}}{i\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{-i\Delta y}{i\Delta y} = -1.$$



Die beiden Werte sind unterschiedlich, die Ableitung existiert also nicht. Da der Punkt z_0 in dieser Überlegung völlig beliebig war, ist $g(z) = \bar{z}$ für kein $z \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar.

Am Ende dieses Abschnitts noch ein paar wesentliche Begriffe: Ist eine Funktion in einem Gebiet komplex differenzierbar, so nennt man sie dort *holomorph* (auch *regulär* oder *analytisch*). Holomorphie, nicht bloß komplexe Differenzierbarkeit ist der zentrale Begriff in der Funktionentheorie. Eine Funktion, die nur in einzelnen Punkten komplex differenzierbar ist, ist nirgendwo holomorph, und sie hat auch noch nicht die schönen Eigenschaften, die holomorphe Funktionen gerade auszeichnen.

Manchmal spricht man allerdings auch von Holomorphie in einzelnen Punkten, das soll bedeuten: f ist in z_0 holomorph, wenn es eine (beliebig kleine) Umgebung $U_\varepsilon(z_0)$ gibt, in der f holomorph ist. Eine auf ganz \mathbb{C} holomorphe Funktion nennt man übrigens auch *ganze Funktion*.



2.5 Die Cauchy-Riemann-Gleichungen

Wie man sich vorstellen kann, ist es sehr umständlich, für jede Funktion wieder neu zu überprüfen, ob der Grenzwert in der Ableitungsdefinition existiert, um herauszufinden, ob und wo sie nun komplex differenzierbar ist. Wir suchen also ein einfacheres Kriterium, um die komplexe Differenzierbarkeit festzustellen.

Nun, zuerst einmal muss jede Funktion, die komplex differenzierbar ist, auch reell total differenzierbar sein. Dies ist auf jeden Fall erfüllt, wenn sowohl Realteil u als auch Imaginärteil v stetige erste Ableitungen nach x und y besitzen (C^1 -Funktionen sind). Das allein genügt aber (wie schon erwähnt) für komplexe Differenzierbarkeit nicht. Zusätzlich müssen nämlich auch noch die *Cauchy-Riemann-Gleichungen*

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}} \quad (2.7)$$

erfüllt sein. Unter diesen beiden Voraussetzungen ist eine Funktion komplex differenzierbar, und umgekehrt erfüllt jede komplex differenzierbare Funktion die beiden Bedingungen (reell total differenzierbar, Cauchy-Riemann-Gleichungen).

Beispiel: Die Funktion $f(z) = e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y$ ist in ganz \mathbb{C} holomorph, denn sowohl $u(x, y) = e^x \cos y$ als auch $v(x, y) = e^x \sin y$ besitzen stetige Ableitungen nach x und y , außerdem erfüllen sie die Cauchy-Riemann-Gleichungen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Für $g(z) = \operatorname{Re} z$ sind zwar sowohl Real- als auch Imaginärteil stetig differenzierbar ($u(x, y) = x$, $v(x, y) = 0$), man erhält aber

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq 0 = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Die Funktion $g = \operatorname{Re} z$ ist also nirgends in \mathbb{C} differenzierbar.

Warum müssen aber überhaupt die Cauchy-Riemann-Gleichungen gelten? Dazu betrachten wir (zur Erinnerung: $\frac{1}{i} = -i$):

$$\begin{aligned} \frac{df}{dz} &= \frac{df}{dz} \frac{\partial(x+iy)}{\partial x} = \frac{df}{dz} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{df}{dz} &= -i \frac{df}{dz} \frac{\partial(x+iy)}{\partial y} = -i \frac{df}{dz} \frac{\partial z}{\partial y} = -i \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned}$$

Da sowohl u als auch v rein reell sind, erhalten wir durch Vergleich von Real- und Imaginärteil die gesuchten Relationen. Sozusagen als Nebenprodukt ergeben sich aber auch noch praktische Formeln zur Bestimmung der Ableitung:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \quad f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (2.8)$$

Benutzt man nun die Cauchy-Riemann-Gleichungen, so kann man das auch in der Form

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} \quad f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.9)$$

schreiben. Es ist also bereits möglich, die Ableitung einer komplexen Funktion zu bestimmen, wenn man nur ihren Real- oder Imaginärteil kennt. Der Frage, wie weit sich Real- und Imaginärteil gegenseitig festlegen, wollen wir im Abschnitt über harmonische Funktionen weiter nachgehen.

2.6 Die Wirtinger-Operatoren

Zusammen mit der reell totalen Differenzierbarkeit stellen die Cauchy-Riemann-Gleichungen bereits ein sehr elegantes und praktisches Kriterium dar, um die komplexe Differenzierbarkeit einer Funktion zu überprüfen. Die beiden Differentialgleichungen können aber noch so umformuliert werden, dass man meist auf einen Blick sieht, ob eine Funktion nun eine komplexe Ableitung besitzt oder nicht.

Dazu definiert man die beiden *Wirtinger*-Operatoren

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right). \quad (2.10)$$

Es sieht dabei so aus, als wären $\frac{\partial}{\partial z}$ und $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ gerade verkehrt herum benannt worden. Das hat aber so schon seine Richtigkeit. Wie nämlich die Schreibweise schon andeutet, wirken die beiden Operatoren genau wie partielle Ableitungen nach z bzw. \bar{z} . Die Linearität der Ableitung bleibt ebenso wie die Produktregel Eins-zu-Eins erhalten; die einzige Komplikation ergibt sich bei der Kettenregel: Ist nämlich $h(z) = g(w(z))$, so gilt für die Wirtinger-Ableitungen

$$\begin{aligned} h_z &= g_w(w(z)) w_z + g_{\bar{w}}(w(z)) \bar{w}_z \\ h_{\bar{z}} &= g_w(w(z)) w_{\bar{z}} + g_{\bar{w}}(w(z)) \bar{w}_{\bar{z}} \end{aligned}$$

Hat man also eine Funktion in der Form $f(z, \bar{z})$ vorliegen, so kann man sie einfach nach z partiell ableiten, wobei man \bar{z} als konstant ansieht und umgekehrt - die beiden Operatoren sind gerade so konstruiert, dass dies gilt, auch wenn z und \bar{z} natürlich in Wirklichkeit nicht voneinander unabhängig sind. Das eigentlich Entscheidende am Wirtinger-Kalkül ist aber, dass für eine komplexe Funktion $f(z)$ überall dort, wo sie differenzierbar ist, gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{df}{dz}. \quad (2.11)$$

Die Cauchy-Riemann-Gleichungen nehmen im Wirtinger-Kalkül also einfach die Form $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ an. Das erleichtert uns das Leben natürlich noch einmal beträchtlich: Wollen wir die komplexe Differenzierbarkeit überprüfen, müssen wir jetzt nur mehr:

1. Die Funktion in der Form $f(z, \bar{z})$ anschreiben (zur Not mit Hilfe von $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ und $y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$).
2. Sie nach \bar{z} partiell ableiten. Wo diese Ableitung Null ist, dort ist f differenzierbar (reell totale Differenzierbarkeit vorausgesetzt).
3. Die Ableitung an diesen Stellen erhält man dann einfach durch partielles Differenzieren nach z .

Beispiel: Wir überprüfen die Funktionen $f_1(z) = z^3$, $f_2(z) = x^2 - 2ixy - y^2$, $f_3(z) = |z|$ und $f_4(z) = \operatorname{Re} z$ auf komplexe Differenzierbarkeit:

- f_1 enthält keinen Term mit \bar{z} , also ist $\frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}} \equiv 0$, die Funktion ist überall komplex differenzierbar, und ihre Ableitung lautet $f_1'(z) = \frac{\partial f_1}{\partial z} = 3z^2$.
- Entweder durch Einsetzen oder sofort durch Hinsehen erkennt man, dass $f_2(z) = x^2 - 2ixy - y^2 = (x - iy)^2 = \bar{z}^2$ ist. Man erhält also $\frac{\partial f_2}{\partial \bar{z}} = 2\bar{z}$, die Funktion kann nur für $z = 0$ komplex differenzierbar sein (und hat dort die Ableitung Null).
- Den Betrag kann man einfach in Terme von z und \bar{z} umschreiben: $f_3(z) = |z| = \sqrt{z\bar{z}}$. Die Ableitung nach \bar{z} ist also $\frac{\partial f_3}{\partial \bar{z}} = \frac{z}{2\sqrt{z\bar{z}}} = \frac{1}{2} \frac{z}{|z|}$, und dieser Ausdruck wird für $z \neq 0$ sicher nie Null. Die Funktion ist also für kein $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ komplex differenzierbar (den Nullpunkt müsste man allerdings noch genauer untersuchen).
- Ebenso umschreiben kann man $f_4(z) = \operatorname{Re} z = x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$. Die partielle Ableitung nach \bar{z} ergibt $\frac{\partial f_4}{\partial \bar{z}} \equiv \frac{1}{2} \neq 0$, wie schon früher festgestellt ist $\operatorname{Re} z$ also nirgends komplex differenzierbar.

Als Faustregel kann man sich also merken, dass immer dann Vorsicht geboten ist, wenn irgendwo \bar{z} auftaucht (kann auch in $|z|$, $\operatorname{Re} z$ oder $\operatorname{Im} z$ „versteckt“ sein) – meist wird dann komplexe Differenzierbarkeit (wenn überhaupt) nur an wenigen Punkten vorliegen.

Auf die reell totale Differenzierbarkeit ist natürlich auch beim Arbeiten mit den Wirtinger-Operatoren weiter zu achten. So kommt etwa in $f(z) = \frac{1}{z-z_0}$ kein \bar{z} vor, die Funktion ist aber im Punkt $z = z_0$ nicht einmal definiert, also auch nur auf $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ komplex differenzierbar.

Das Wirtinger-Kalkül spielt in der Funktionentheorie einer komplexen Variablen eher nur eine Nebenrolle; wirkliche Bedeutung erlangt er vor allem im Fachgebiet Funktionentheorie mehrerer Variablen.

2.7 Einige Eigenschaften holomorpher Funktionen

Die meisten Besonderheiten der holomorphen Funktionen werden erst im Zusammenhang mit komplexen Kurvenintegralen sichtbar. Einige Eigenschaften können wir aber auch hier schon vorstellen:

- Ist eine Funktion einmal komplex differenzierbar, so existieren auch die Ableitungen beliebig hoher Ordnung.
- Seien f und g zwei auf einem Gebiet G holomorphe Funktionen, und es sei $f(z) = g(z)$ auf einer Menge, die zumindest einen Häufungspunkt hat (z.B. einer Kurve). Dann stimmen f und g auf ganz G überein. (Identitätssatz für holomorphe Funktionen.)
- Wenn die Funktion $f(z)$ auf einem Gebiet G holomorph und weiters stetig auf dem Abschluss \bar{G} ist, dann nimmt sie ihr Betragsmaximum am Rand an. (Es kann also keine echten lokalen Betragsmaxima im Inneren geben.)
- Wenn eine Funktion beschränkt ($|f(z)| < M \forall z \in \mathbb{C}$) und holomorph auf ganz \mathbb{C} ist, dann ist sie konstant. (Satz von Liouville)

Mit Hilfe dieser Sätze lassen sich beispielsweise viele Funktionalgleichungen der elementaren Funktionen leicht beweisen. So kann man etwa zeigen, dass die Identität $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ auch für beliebige komplexe z gelten muss. Die Funktion $f(z) := \sin^2 z + \cos^2 z - 1$ ist ja auf ganz \mathbb{C} holomorph und auf der reellen Achse gilt $f(x) \equiv 0$. Also ist nach dem Identitätssatz $f(z) \equiv 0$ für alle komplexen z , und damit gilt die Identität $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ in ganz \mathbb{C} .

Die Identitätssatz sagt weiter auch, dass man die reellen Funktionen e^x , $\sin x$ usw. nur auf *eine* Art holomorph nach ganz \mathbb{C} fortsetzen kann.

2.8 Harmonische Funktionen

Für eine holomorphe Funktion gelten ja bekanntlich die Cauchy-Riemann-Gleichungen $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ und $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. Wenden wir nun den Laplace-Operator $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ auf den Realteil einer solchen Funktion an, so erhalten wir

$$\Delta u = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0,$$

und ebenso gilt auch für den Imaginärteil $\Delta v = 0$. Solche Funktionen Φ , die die Laplace-Gleichung $\Delta \Phi = 0$ erfüllen, nennt man *harmonisch*. Real- und Imaginärteil jeder holomorphen Funktion sind also harmonisch.

Auf Sterngebieten gilt aber sogar: Ist $u(x, y)$ eine harmonische Funktion, so läßt sich stets eine weitere harmonische Funktion $v(x, y)$ finden, so dass $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ holomorph ist. Diese *harmonisch konjugierte* Funktion ist bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt.

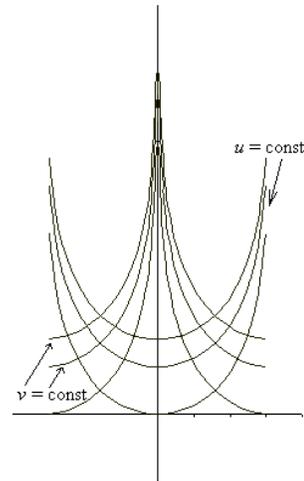
Aus den Cauchy-Riemann-Gleichungen folgt noch ein weiterer wichtiger Zusammenhang zwischen Real- und Imaginärteil einer holomorphen Funktion. Dazu untersuchen wir die Kurvenscharen $u(x, y) = \alpha = \text{const}$ und $v(x, y) = \beta = \text{const}$. Für eine implizit gegebene Kurve $F(x, y) = \text{const}$ erhält man durch implizites Differenzieren $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0$ und damit für die Steigung

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}.$$

Bilden wir nun das Produkt der Steigungen von $u(x, y) = \alpha$ und $v(x, y) = \beta$ und verwenden wieder die Cauchy-Riemann-Gleichungen, so erhalten wir:

$$\frac{\partial u/\partial x}{\partial u/\partial y} \cdot \frac{\partial v/\partial x}{\partial v/\partial y} = \frac{\partial u/\partial x}{-\partial v/\partial x} \cdot \frac{\partial v/\partial x}{\partial u/\partial x} = -1.$$

Für eine holomorphe Funktion $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ sind also die Kurvenscharen $u(x, y) = \alpha$ und $v(x, y) = \beta$ in jedem Punkt orthogonal (im Bild rechts für $f(z) = e^z$ und $\text{Im } z > 0$ gezeigt). Diese Eigenschaft wird in Physik und Elektrotechnik gerne ausgenutzt: Bekanntlich stehen ja (etwa für das elektrische Feld) Äquipotentiallinien und Feldlinien normal aufeinander, das Potential muss zudem (in ladungsfreien Bereichen) die Laplace-Gleichung erfüllen. Identifiziert man nun z.B. den Realteil von $f(z)$ mit dem Potential und den Imaginärteil mit dem Feldlinienverlauf, so beschreibt jedes holomorphe f eine spezielle Potentialkonfiguration mit den dazugehörigen Feldlinien.



Wie berechnet man nun aber zu einem gegebenen $u(x, y)$ die konjugiert harmonische Partnerfunktion v ? Ein denkbarer Weg wäre, einfach die Cauchy-Riemann-Gleichungen zu integrieren. Die Gleichungen $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ und $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ können wir ja auch in Integralform

$$v = \int \frac{\partial u}{\partial x} dy \quad \text{und} \quad v = - \int \frac{\partial u}{\partial y} dx$$

schreiben. Dabei ist aber zu beachten, dass die Integrations„konstante“ jeweils noch von der Variablen, über die nicht integriert wird, abhängen kann. Erst durch Vergleich der beiden Ausdrücke erhält man also das vollständige $v(x, y)$.

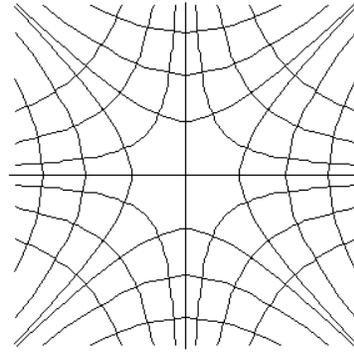
Beispiel: Wir wollen zu $u(x, y) = x^2 - y^2$ die konjugiert harmonische Funktion bestimmen. Dabei sollten wir zuerst einmal überprüfen, ob u überhaupt selbst harmonisch ist:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 - 2 = 0.$$

Diese Voraussetzung ist auf jeden Fall einmal erfüllt. Integration der Cauchy-Riemann-Gleichungen liefert:

$$v = \int \frac{\partial u}{\partial x} dy = \int 2x dy = 2xy + \phi(x)$$

$$v = - \int \frac{\partial u}{\partial y} dx = - \int (-2y) dx = 2xy + \psi(y)$$



In diesem Fall ist $\phi(x) = \psi(y) = C$ eine Konstante, die man (wenn nicht anders gefordert) auch Null setzen kann, und man erhält: $v(x, y) = 2xy$. Die Funktion f lautet also $f(z) = x^2 + 2ixy - y^2 = (x + iy)^2 = z^2$. Die orthogonalen Kurvenscharen für konstante Real- und Imaginärteile sind die rechts dargestellten Hyperbeln.

Beispiel: Nun untersuchen wir $u(x, y) = 2xy - x + y$. Auch diese Funktion ist harmonisch, und wir erhalten durch Integration der Cauchy-Riemann-Gleichungen:

$$v = \int \frac{\partial u}{\partial x} dy = \int (2y - 1) dy = y^2 - y + \phi(x)$$

$$v = - \int \frac{\partial u}{\partial y} dx = - \int (2x + 1) dx = -x^2 - x + \psi(y)$$

In diesem Fall ist also $\phi(x) = -x^2 - x + C$ und $\psi(y) = y^2 - y + C$, wobei C eine beliebige reelle Konstante ist. Setzen wir diese gleich Null, erhalten wir: $v(x, y) = y^2 - x^2 - y - x$. Die gesamte Funktion lautet also

$$f(z) = u + iv = 2xy - x + y + i(y^2 - x^2 - y - x)$$

$$= -i(x^2 + 2ixy - y^2) - (1 + i)(x + iy) = -iz^2 - (1 + i)z$$

Dieses Umschreiben in z ist gleichzeitig auch eine Kontrollrechnung. Hat man richtig gerechnet, dürfen sich keine Terme mit \bar{z} ergeben.

Neben dieser (hoffentlich) intuitiv einsichtigen Methode gibt es aber noch eine zweite, ein wenig raffiniertere, die auf dem Identitätssatz für holomorphe Funktionen beruht:

Für die Ableitung einer Funktion $f = u + iv$ gilt ja: $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)$. Das muss natürlich auch für reelle x aus einem bestimmten Intervall stimmen, $f'(z = x) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0)$. Wir definieren nun für unser (auf einem Gebiet G gegebenes) $u(x, y)$ die Funktion $a(x) := \frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0)$. Wenn $a(z)$ holomorph ist, dann muss auf ganz G immer $a(z) = f'(z)$ gelten. Man muss also in $a(x)$ nur x durch z ersetzen und die Funktion integrieren (also ein Stammfunktion aufsuchen), wobei die Integrationskonstante so zu wählen ist, dass $\text{Re } f$ tatsächlich gleich u ist.

Klingt kompliziert? In der praktischen Anwendung wird es hoffentlich schnell klarer werden.

Beispiel: Wir bestimmen mit dieser neuen Methode noch einmal jene holomorphe Funktion, deren Realteil $u(x, y) = x^2 - y^2$ ist. Es ist ja $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 2x$ und $\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -2y$, also ergibt sich: $a(x) := \frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 2x$.

Diese Funktion muss für reelle $z = x$ mit der Ableitungen von f übereinstimmen, also ist $f'(z) = 2z$, und durch Integration erhält man $f(z) = z^2 + C$, wobei die Konstante C nur imaginär sein darf, um u nicht zu verändern. Meist wird man $C = 0$ setzen.

Welche Methode einem lieber ist, bleibt natürlich jedem selbst überlassen. Je nachdem, ob man sich für die Partnerfunktion $v(x, y)$ oder für das holomorphe $f(z)$ interessiert, führt im ersten Fall meist die Integration der Cauchy-Riemann-Gleichungen, im zweiten die auf dem Identitätssatz beruhende Methode schneller zum Ziel.

2.9 Übungsaufgaben

1. Man verifiziere die Relation $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ für die komplexe Zahl $z = \pi + i$.

Wir berechnen

$$\begin{aligned} e^{i(\pi+i)} &= e^{-1+i\pi} = e^{-1}e^{i\pi} = \frac{1}{e}(\cos \pi + i \sin \pi) = -\frac{1}{e} \\ \cos(\pi + i) &= \cos \pi \cosh 1 - i \sin \pi \sinh 1 = -\frac{e+e^{-1}}{2} \\ \sin(\pi + i) &= \sin \pi \cosh 1 + i \cos \pi \sinh 1 = -i\frac{e-e^{-1}}{2} \end{aligned}$$

Nun erhalten wir erwartungsgemäß

$$\cos z + i \sin z = -\frac{e^1+e^{-1}}{2} + \frac{e^1-e^{-1}}{2} = -\frac{1}{e} = e^{i(\pi+i)},$$

die Formel ist zumindest in diesem Fall also richtig.

2. Man berechne

$$\operatorname{Re} \left(e^{(z^3)} \right) \quad \text{und} \quad \operatorname{Im} \left(e^{(z^3)} \right)$$

für $z = x + iy$ und damit speziell für $z_1 = \sqrt[3]{\pi} + i\sqrt[3]{\pi}$.

3. Man berechne $\operatorname{Log} z_k$ für die unten gegebenen komplexen Zahlen z_1, z_2 und $z_3 = z_1 \cdot z_2$.

a) $z_1 = i, z_2 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i, \quad b) z_1 = 1 - \sqrt{3}i, z_2 = -1 - \sqrt{3}i$
 und c) $z_1 = 1 - i$ und $z_2 = 3i$. Gilt dabei $\operatorname{Log}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Log} z_1 + \operatorname{Log} z_2$?

$$\begin{aligned} |z_1| &= 1, \operatorname{Arg} z_1 = \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad \operatorname{Log} z_1 = \ln 1 + i\frac{\pi}{2} = i\frac{\pi}{2} \\ |z_2| &= 2, \operatorname{Arg} z_2 = \frac{\pi}{4} \quad \text{und} \quad \operatorname{Log} z_2 = \ln 2 + i\frac{\pi}{4} \\ |z_3| &= |z_1| \cdot |z_2| = 2, \operatorname{arg} z_3 = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 = \frac{3\pi}{4} = \operatorname{Arg} z_3 \quad \text{und} \quad \operatorname{Log} z_3 = \ln 2 + i\frac{3\pi}{4} \end{aligned}$$

In diesem Fall ist tatsächlich $\operatorname{Log}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Log} z_1 + \operatorname{Log} z_2$. Das würde nicht mehr gelten, wenn $\operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 \notin (-\pi, \pi]$, die Summe der Argumente also kein Hauptwert mehr wäre.

4. Man überprüfe, ob die Grenzwerte a) $\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^2-1}{z+2}$, b) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{z}$ und c) $\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^2-1}{1+\bar{z}}$ existieren und berechne sie gegebenenfalls.

Der erste Fall ergibt:

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^2-1}{z+2} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(1+\Delta z)^2-1}{1+\Delta z+2} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1+2\Delta z+(\Delta z)^2-1}{3+\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \Delta z \frac{2+\Delta z}{3+\Delta z} = 0,$$

unabhängig davon, auf welchem Weg Δz gegen Null geht. Der Grenzwert existiert also und ist gleich Null.

5. Man zeige anhand der Cauchy-Riemann-Gleichungen, dass
 a) $f(z) = \cos z$, b) $f(z) = z^2 + (1+i)z - 1$, c) $f(z) = e^{\sin z}$
 auf ganz \mathbb{C} holomorph ist.

a) Zuerst überprüfen wir, ob Real- und Imaginärteil reell total differenzierbar sind, das gilt sicher, wenn sie stetige erste partielle Ableitungen haben.

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(z) = \cos x \cosh y \in C^1 \quad v(x, y) = \operatorname{Im} f(z) = -\sin x \sinh y \in C^1$$

Dieser Teil wäre also erledigt. Nun testen wir die Cauchy-Riemann-Gleichungen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\sin x \cosh y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \cos x \sinh y = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Es handelt sich also tatsächlich um eine ganze Funktion.

6. Man überprüfe mit Hilfe der Wirtinger-Operatoren, wo auf der Menge M die folgenden Funktionen komplex differenzierbar bzw. wo sie holomorph sind:

a) $f(z) = \frac{z^5}{|z|^4}$ in $M = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

b) $f(z) = \frac{z^4}{|z|^3}$ in $M = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

c) $f(z) = e^{|z|^2 - \frac{1}{2}\bar{z}^2}$ in $M = \mathbb{C}$

Unsere Funktion in a) können wir mittels $|z|^2 = z\bar{z}$ anschreiben als

$$f(z) = \frac{z^5}{z^2 \bar{z}^2} = \frac{z^3}{\bar{z}^2} = z^3 \bar{z}^{-2}$$

Für die Wirtinger-Ableitung nach \bar{z} erhalten wir:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = -2z^3 \bar{z}^{-3} = -2\frac{z^3}{\bar{z}^3}$$

Für $z \neq 0$ kann das nicht Null werden. Die Funktion f ist demnach in M nirgends differenzierbar, also natürlich auch nirgendwo holomorph. Aber auch eine Funktion, die an einzelnen Punkten oder entlang einer Kurve differenzierbar ist, ist dort noch nicht holomorph.

7. Man zeige, dass $f(z) = \operatorname{Im} z$ für kein $z \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar ist, indem man a) die entsprechenden Grenzwerte bilde, b) die Cauchy-Riemann-Gleichungen überprüfe und c) die Wirtinger-Operatoren verwende.
8. Man zeige, dass die folgenden Funktionen $u(x, y)$ harmonisch sind und berechne die konjugiert harmonische Funktionen $v(x, y)$ sowie $f(z) = u + iv$. (Die Integrationskonstante darf dabei Null gesetzt werden.)
 a) $u(x, y) = 2x(1 - y)$, b) $u(x, y) = x^2 - y^2 - 2xy - 3x + 3y$, c) $u(x, y) = x^3y - xy^3$

Ausmultiplizieren liefert $u(x, y) = 2x - 2xy$. Damit erhalten wir $\frac{\partial u}{\partial x} = 2 - 2y$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -2x$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, also ist $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Zur Bestimmung der konjugiert harmonischen Funktion können wir entweder mit Integration der Cauchy-Riemann-Gleichungen oder aber

mit dem Identitätssatz arbeiten: Die erste Variante ergibt $v = \int (2-2y) dy = 2y - y^2 + \phi(x)$ und $v = \int 2x dx = x^2 + \psi(y)$. Der Vergleich zeigt:

$$v(x, y) = x^2 - y^2 + 2y + C,$$

wobei wir hier $C = 0$ setzen. Für die holomorphe Funktion f erhalten wir

$$\begin{aligned} f(z) &= u(x, y) + iv(x, y) = 2x - 2xy + ix^2 - iy^2 + 2iy \\ &= i(x^2 + 2ixy - y^2) + 2(x + iy) = iz^2 + 2z. \end{aligned}$$

9. Gegeben ist die Funktion $u(x, y) = e^{3x} \cos(ay)$. Man bestimme $a \in \mathbb{R}^+$ so, dass $u(x, y)$ harmonisch ist. Dann ermittle man die harmonisch konjugierte Funktion $v(x, y)$ sowie jene holomorphe Funktion f , für die gilt: $\operatorname{Re} f = u$ und $f(0) = 1 + i$.
10. Man verifiziere für die Funktion $f(z) = z^2$, dass die Kurven $\operatorname{Re} f = \alpha$ und $\operatorname{Im} f = \beta$ im Punkt $z_0 = 2 + i$ orthogonal sind.

Wir erhalten $f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 + 2ixy - y^2$, also $\operatorname{Re} f = x^2 - y^2$ und $\operatorname{Im} f = 2xy$. Im Punkt $z_0 = 2 + i$ erhalten wir für $\operatorname{Re} f = \text{const}$ die Kurve $x^2 - y^2 = 3$, also $y_u = \sqrt{x^2 - 3}$. Ihre Steigung beträgt $y'_u(2) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 3}} \Big|_{x=2} = 2$. Analog ergibt die Bedingung $\operatorname{Im} f = \text{const}$ die Kurve $2xy = 4$, also $y_v = \frac{2}{x}$. In diesem Fall ist die Steigung $y'_v(2) = -\frac{2}{x^2} \Big|_{x=2} = -\frac{1}{2}$. Das Produkt der beiden Steigungen ist $y'_u(2) \cdot y'_v(2) = -1$, die beiden Kurven sind also tatsächlich orthogonal.

11. Man finde ein Beispiel dafür, dass die Aussage des Identitätssatzes nicht mehr zwingend gilt, wenn zwei Funktionen auf einer Menge M von unendlich vielen Punkten übereinstimmen, M aber keinen Häufungspunkt hat.
12. Man beweise die Formel $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ durch Einsetzen in die Potenzreihendefinition.
13. Man beweise $e^a \cdot e^b = e^{a+b}$ mit Hilfe der Potenzreihendefinition (Hinweis: Cauchy-Produkt).
14. Man zeige, dass $\operatorname{Log} z$ an der Stelle $z = -1$ unstetig ist.
15. Sind für die Funktion

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z^5}{|z|^4} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

im Punkt $z_0 = 0$ die Cauchy-Riemann-Gleichungen erfüllt? (Hinweis: Man ermittle zuerst $u(x, 0)$, $v(x, 0)$, $u(x, 0)$ und $u(0, y)$ und berechne daraus die partiellen Ableitungen.) Ist f in $z_0 = 0$ komplex differenzierbar?

16. a) Gibt es eine Funktion $f(z)$ mit der Eigenschaft

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} \quad \text{für } n = 2, 3, 4, \dots,$$

die a) auf $|z| < 1$, b) auf ganz \mathbb{C} holomorph ist?

17. Mit dem Satz von Liouville (eine auf ganz \mathbb{C} holomorphe beschränkte Funktion ist konstant) beweise man, dass jedes Polynom $P(z)$ vom Grad $n \geq 1$ mindestens eine Nullstelle hat. (Hinweis: Man betrachte $\frac{1}{P(z)}$.)

Kapitel 3

Komplexe Kurvenintegrale

Wir kommen nun zu den Kurvenintegralen, also allgemein Integralen über beliebige Wege in der komplexen Ebene. Das geht natürlich nicht auf einen Schlag: Bevor wir die allgemeinen Kurvenintegrale angehen können, befassen wir uns vorerst einmal mit Integralen über komplexwertige Funktionen sowie Kurven im Komplexen.

Damit erhalten wird die Bausteine, um echte Kurvenintegrale zu berechnen – und wie im Reellen wird es uns ein wichtiges Anliegen sein festzustellen, wann ein solches Integral wegunabhängig ist. Aussagen darüber, wann das tatsächlich der Fall ist, macht der wohl wesentlichste Satz der Funktionentheorie überhaupt, der Cauchysche Integralsatz.

Es wird sich zeigen, dass das entscheidende Kriterium (neben bestimmten Anforderungen an das Gebiet, in dem die Kurve verläuft) die Holomorphie sein wird, und im Gegenzug zeigen holomorphe Funktionen ganz erstaunliche Eigenschaften, die etwa im Zusammenhang mit der Cauchyschen Integralformel sichtbar werden.

3.1 Komplexwertige Funktionen mit reellem Argument

Der Weg zu unserem letztendlichen Ziel, die Integralrechnung im Komplexen einzuführen, wird über mehrere Etappen laufen, und die erste davon bekommen wir mit der reellen Integralrechnung beinahe „geschenkt“. Zu Beginn betrachten wir nämlich erst einmal Funktionen, die zwar in die komplexen Zahlen abbilden, als Argument aber nur eine reelle Variable haben, also Funktionen der Form $f(t) = u(t) + iv(t)$ mit $t \in \mathbb{R}$.

Integrieren ist ja eine lineare Operation, für beliebige Funktionen f und g gilt also $\int_a^b (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int_a^b f dx + \beta \int_a^b g dx$, und das soll nun auch so sein, wenn die Konstanten α und β komplex sind. Wir erhalten aus dieser Forderung das wesentliche Ergebnis:

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b (u(t) + iv(t)) dt = \int_a^b u(t) dt + i \int_a^b v(t) dt. \quad (3.1)$$

Dabei sind nur mehr zwei reelle Integrale zu berechnen. Doch selbst damit macht man sich das Leben noch schwerer als notwendig. Geht man nämlich einmal von der obigen Definition aus, so lassen sich (aufgrund der Linearität der Integration) beliebige Integrale $\int_a^b f(t) dt$ auch für komplexwertige Funktionen berechnen wie „gewöhnliche“ reelle Integrale, und dass dort irgendwelche komplexen Zahlen auftauchen, sollte einen überhaupt nicht stören.

Wie sich leicht nachprüfen lässt, gelten für Integrale über Funktionen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ nämlich die folgenden Rechenregeln (die ersten vier lauten wie im Reellen):

$$\begin{aligned} \int_a^b (f + g)(t) dt &= \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt & \int_a^b cf(t) dt &= c \int_a^b f(t) dt \\ \int_a^b f(t) dt + \int_b^c f(t) dt &= \int_a^c f(t) dt & \int_a^b f(t) dt &= - \int_b^a f(t) dt \\ \operatorname{Re} \int_a^b f(t) dt &= \int_a^b \operatorname{Re} f(t) dt & \operatorname{Im} \int_a^b f(t) dt &= \int_a^b \operatorname{Im} f(t) dt \end{aligned} \quad (3.2)$$

Vor allem aber gilt nach wie vor der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung: Ist F eine Stammfunktion von f , also $\frac{dF}{dt} = f(t)$, so ist

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a), \quad (3.3)$$

und alle Stammfunktionen unterscheiden sich nur um jeweils eine Konstante. Der Beweis dafür folgt sofort aus der reellen Analysis, wenn man Real- und Imaginärteil getrennt betrachtet. Aus diesem Grund wird man komplexe Integrale meist genauso berechnen wie ihre reellen Verwandten: durch Aufsuchen einer Stammfunktion.

Der Vollständigkeit halber sei noch gesagt, dass nach wie vor die Abschätzung

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt \quad (3.4)$$

gilt, wie sich mit ein wenig mehr Aufwand leicht zeigen lässt. Insgesamt gibt es also keinen Grund, Angst vor komplexen Integralen zu haben – zumindest nicht mehr als vor reellen, die natürlich auch so ihre Tücken haben können.

Beispiel: Wir berechnen zum Eingewöhnen einmal das Integral $\int_0^\pi e^{it} dt$. Durch Auftrennen in Real- und Imaginärteil erhalten wir:

$$\int_0^\pi e^{it} dt = \int_0^\pi (\cos t + i \sin t) dt = \int_0^\pi \cos t dt + i \int_0^\pi \sin t dt = 0 + i \cdot 2 = 2i.$$

Noch einfacher erhält man das gleiche Ergebnis aber mit

$$\int_0^\pi e^{it} dt = \frac{1}{i} e^{it} \Big|_0^\pi = \frac{e^{i\pi} - e^0}{i} = 2i.$$

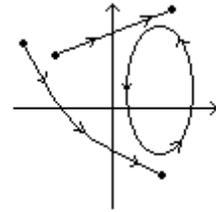
Beispiel: Auch Polynome machen natürlich keine Probleme:

$$\int_0^1 (t^2 + (1+i)t - 5i) dt = \left(\frac{t^3}{3} + (1+i)\frac{t^2}{2} - 5it \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1+i}{2} - 5i = \frac{5}{6} - \frac{9}{2}i.$$

Allgemein können bei solchen Integralen natürlich sämtliche schon aus der reellen Analysis bekannten Tricks (wie etwa Partialbruchzerlegung oder partielle Integration) zur Anwendung kommen. Auch Substitutionen sind erlaubt, allerdings sollte man bei ihnen darauf achten, dass man nicht versehentlich die reelle Achse verlässt – sonst hat man nämlich bereits ein echtes Kurvenintegral vorliegen.

3.2 Wege in der komplexen Ebene

Im ersten Abschnitt haben wir uns mit Integralen über komplexwertige Funktionen beschäftigt, die nur von einer reellen Variablen abhängen. Während man in \mathbb{R} aber notgedrungen nur entlang von Intervallen integrieren kann, stehen in der komplexen Ebene beliebige Wege zur Verfügung (so wie sie etwa rechts dargestellt sind). Teile der reellen Achse sind also nur ganz spezielle Integrationskurven, wenn auch sehr wichtige – wir werden nämlich allgemeine Kurvenintegrale beim Ausrechnen meist auf diesen Fall zurückführen.

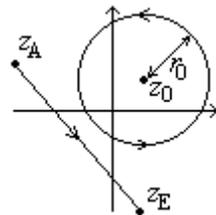


Zunächst müssen wir aber wissen, wie wir solche Kurven oder Wege überhaupt beschreiben sollen. Die beste Möglichkeit dazu ist eine Parameterdarstellung der Art $C : z(t) = x(t) + iy(t)$ mit einem reellen Parameter t . Um Komplikationen aus dem Weg zu gehen, lassen wir nur solche Funktionen $x(t)$ und $y(t)$ zu, die zumindest stückweise stetig differenzierbar sind – böartige Dinge wie etwa die berühmt-berüchtigte Schneeflockenkurve lassen wir also beiseite.

Auch wenn sich in Parameterdarstellung fast beliebige Kurven beschreiben lassen, verwendet man in der Praxis doch vor allem zwei Arten, nämlich Kreise und Geraden. Diese lassen sich einfach parametrisieren; nebenbei nimmt auch die Schwierigkeit der Integrale, die man erhält, im allgemeinen mit der Komplexität der Kurve zu.

Für einen mathematisch positiv (das heißt gegen den Uhrzeigersinn) durchlaufenen Kreis mit Mittelpunkt z_0 und Radius r_0 erhält man beispielsweise

$$z(t) = z_0 + r_0 e^{it} \quad t \in [0, 2\pi].$$



Ein Geradenstück mit Anfangspunkt z_A und Endpunkt z_E ergibt sich mit

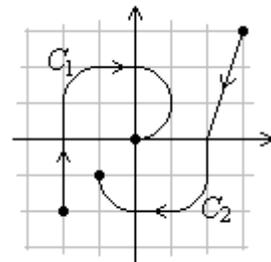
$$z(t) = z_A + (z_E - z_A)t \quad t \in [0, 1].$$

Besonders angenehm sind natürlich Geraden parallel zur reellen oder imaginären Achse ($z(t) = z_0 + t$ oder $z(t) = z_0 + it$ mit einem geeigneten t -Intervall).

Beispiel: Aus diesen Elementen können wir nun auch wieder kompliziertere Kurven zusammensetzen. So suchen wir jetzt eine Parametrisierung für die beiden im folgenden dargestellten Kurven C_1 und C_2 .

Hier ist es sinnvoll, den Weg in mehrere Stücke zu zerlegen. Der erste Teil von C_1 ist ein Geradenstück, das wir mit $C_{11} : z(t) = -2 - 2i + it$, $t \in [0, 3]$ anschreiben können. Es folgt ein negativ durchlaufener Viertelkreis $C_{12} : z(t) = -1 + i + e^{it}$, $t \in [\pi, \frac{\pi}{2}]$, wieder ein Geradenstück $C_{13} : z(t) = -1 + 2i + t$, $t \in [0, 1]$ und zum Abschluss ein Halbkreis $C_{14} : z(t) = i + e^{it}$, $t \in [\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}]$.

Analog erhält man für C_2 : $C_{21} : z(t) = 3 + 3i + (-1 - 3i)t$, $t \in [0, 1]$, $C_{22} : z(t) = 2 - it$, $t \in [0, 1]$, $C_{23} : z(t) = 1 - i + e^{it}$, $t \in [0, -\frac{\pi}{2}]$, $C_{24} : z(t) = 1 - 2i - t$, $t \in [0, 1]$ und $C_{25} : z(t) = -i + e^{it}$, $t \in [-\frac{\pi}{2}, -\pi]$.



Die Notation $t \in [a, b]$ mit $a > b$ mag etwas ungewohnt sein, $t = a \dots b$ wäre eine vielleicht naheliegendere Schreibweise. Wichtig ist nur, dass man weiß, was gemeint ist, nämlich dass der Parameter von a nach b läuft.

An sich gäbe es über Kurven natürlich einiges zu sagen, das meiste davon ist aber analog zum reellen Fall. So muss man etwa zwischen einer Kurve $C : z(t)$ selbst und ihrem Bild $C^* = \{z \in \mathbb{C} \mid z = z(t), t \in [a, b]\}$ unterscheiden. Im ersten Fall hat man es mit einer Funktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ zu tun, im zweiten mit einer Punktmenge $\subset \mathbb{C}$.

Die gleiche Kurve kann verschieden parametrisiert werden, so stellen $z(t) = e^{it}$, $t \in [0, \pi]$ und $z(t) = e^{2it}$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ natürlich die gleiche Kurve dar. Durchläuft man eine Kurve C in der anderen Richtung ($t \in [a, b] \rightarrow t \in [b, a]$), so schreibt man dafür oft $-C$ (oder auch C^{-1}). Das Bild der Kurve ändert sich bei Umkehrung des Durchlaufungssinns nicht.

Mit anderen Eigenschaften von Kurven werden wir es noch in den nächsten Abschnitten zu tun bekommen, denn jetzt haben wir alle Werkzeuge in der Hand, um uns erfolgreich mit komplexen Kurvenintegralen zu befassen.

3.3 Kurvenintegrale

Nun sind wir also bereit, Integrale über beliebige Funktionen und beliebige Kurven im Komplexen zu berechnen – im Prinzip zumindest, denn in der Praxis sind analytisch lösbare Integrale ja leider eher die Ausnahme als die Regel. Wie auch immer, wir definieren nun als Kurvenintegral über eine Funktion $f(z)$ entlang einer mit $z(t)$, $t \in [a, b]$ parametrisierten Kurve C :

$$\int_C f(z) dz := \int_a^b f(z(t)) \frac{dz}{dt} dt \quad (3.5)$$

Die Formel ist mit $dz = \frac{dz}{dt} dt$ hoffentlich leicht zu merken, und bevor wir uns über die Eigenschaften von Kurvenintegralen unterhalten, noch schnell einige Beispiele zum ersten Kennenlernen:

Beispiel: Als erstes berechnen wir das Integral über $f(z) = z^2$ entlang des Halbkreises $C : z(t) = e^{it}$, $t \in [0, \pi]$. Dafür erhalten wir

$$\int_C z^2 dz = \int_0^\pi (e^{it})^2 i e^{it} dt = i \int_0^\pi e^{3it} dt = i \frac{e^{3it}}{3i} \Big|_0^\pi = -\frac{2}{3}.$$

Beispiel: Nun ermitteln wir $\int_C \bar{z} dz$, wobei C die Strecke $z(t) = i + (1+i)t$, $t \in [0, 1]$ ist.

$$\begin{aligned} \int_C \bar{z} dz &= \int_0^1 \bar{z} \frac{dz}{dt} dt = \int_0^1 \overline{(i + t + it)} (1+i) dt = (1+i) \int_0^1 (-i + (1-i)t) dt \\ &= (1+i) \left(-it + (1-i) \frac{t^2}{2} \right) \Big|_0^1 = (1+i) \left(-i + \frac{1-i}{2} \right) = 2-i \end{aligned}$$

Nach diesen Demonstrationsbeispielen nun aber ein kurzer Überblick über die wichtigsten Eigenschaften und Merkmale:

- Ist eine Kurve C aus mehreren Stücken C_1, \dots, C_n zusammengesetzt, so erhält man

$$\int_C f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \dots + \int_{C_n} f(z) dz.$$

- Durchläuft man den Integrationsweg in der umgekehrten Richtung, so kehrt sich das Vorzeichen des Integrals um:

$$\int_{-C} f(z) dz = - \int_C f(z) dz.$$

- Real- und Imaginärteil eines komplexen Kurvenintegrals sind reelle Kurvenintegrale. Ein wenig schlampig, aber gut zu merken:

$$\int_C f(z) dz = \int_C (u + iv)(dx + i dy) = \int_C (u dx - v dy) + i \int_C (v dx + u dy).$$

- Kurvenintegrale sind linear in dem Sinne, dass $\int_C (f + g)(z) dz = \int_C f(z) dz + \int_C g(z) dz$ und $\int_C cf(z) dz = c \int_C f(z) dz$ ist.
- Hingegen gilt eine Eigenschaft nicht mehr, die wir bei Integralen entlang der reellen Achse noch vorliegen hatten. Im allgemeinen ist nämlich $\operatorname{Re} \int_C f(z) dz \neq \int_C \operatorname{Re} f(z) dz$ und analog für den Imaginärteil.
- Der Wert eines Kurvenintegrals hängt von der Parametrisierung der Kurve nicht ab. Zwei Kurven mit dem selben Bild C^* und der selben Orientierung liefern für jede Funktion auch den selben Integralwert.
- Die Beziehung $|\int_a^b f(t) dt| \leq \int_a^b |f(t)| dt$ läßt sich so nicht mehr auf Kurvenintegrale übertragen, allerdings gibt es zum Trost eine andere Abschätzung: Nennen wir $L(C)$ die Länge der Kurve C und $\|f\|_C$ das Maximum des Betrages von f auf C , so ist

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \|f\|_C \cdot L(C).$$

- Bei Kurvenintegralen über gleichmäßig konvergente Funktionenfolgen oder -reihen dürfen Grenzübergang und Integration vertauscht werden.

Eines der wichtigsten Kurvenintegrale überhaupt ist jenes über die Funktionen $(z - z_0)^n$ mit $n \in \mathbb{Z}$, wobei der Integrationsweg der Einfachheit halber ein Kreis mit Radius R sein soll, $C : z(t) = z_0 + Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Zunächst betrachten wir einmal den Fall $n \neq -1$:

$$\int_C (z - z_0)^n dz = \int_0^{2\pi} (Re^{it})^n (iRe^{it}) dt = iR^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt = \frac{R^{n+1}}{n+1} e^{i(n+1)t} \Big|_0^{2\pi} = 0,$$

denn e^z ist ja $2\pi i$ -periodisch. Nun geht es nur noch um den Fall $n = -1$. Hier erhalten wir:

$$\int_C \frac{1}{z - z_0} dz = \int_0^{2\pi} R^{-1} e^{-it} i R e^{it} dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

Das Ergebnis lautet also

$$\boxed{\int_C (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq -1 \\ 2\pi i & \text{für } n = -1 \end{cases}} \quad (3.6)$$

und gehört zu den wichtigsten Formeln der Funktionentheorie überhaupt – spätestens beim Residuensatz wird auch klarwerden warum.

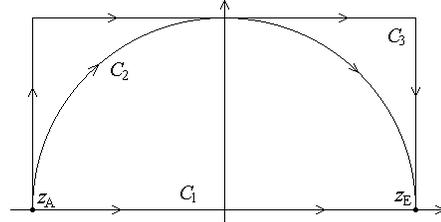
Nun aber zu einem Beispiel, das einerseits noch einmal das handwerkliche Rechnen demonstrieren soll, andererseits aber auch gleich auf eine der wesentlichsten Fragen bei Kurvenintegralen hinweist: die Wegunabhängigkeit.

Beispiel: Wir berechnen die Integrale $\int_{C_k} z^2 dz$ und $\int_{C_k} \bar{z} dz$ entlang der drei rechts dargestellten Wege mit Anfangspunkt $z_A = -1$ und Endpunkt $z_E = +1$:

Die erste Integration erfolgt entlang der reellen Achse.

$$\int_{C_1} z^2 dz = \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{3}$$

$$\int_{C_1} \bar{z} dz = \int_{-1}^1 t dt = \frac{t^2}{2} \Big|_{-1}^1 = 0$$



Nun integrieren wir entlang eines Halbkreises in der oberen Halbebene:

$$\int_{C_2} z^2 dz = \int_{\pi}^0 (e^{it})^2 i e^{it} dt = -i \int_0^{\pi} e^{3it} dt = -i \frac{e^{3it}}{3i} \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{3}$$

$$\int_{C_2} \bar{z} dz = \int_{\pi}^0 e^{-it} i e^{it} dt = -i \int_0^{\pi} dt = -i\pi$$

Zuletzt wählen wir noch ein Rechteck:

$$\begin{aligned} \int_{C_3} z^2 dz &= \int_0^1 (-1 + it)^2 i dt + \int_{-1}^1 (i + t)^2 dt + \int_1^0 (1 + it)^2 i dt = \\ &= i \int_0^1 (1 - 2it - t^2) dt + \int_{-1}^1 (-1 + 2it + t^2) dt - i \int_0^1 (1 + 2it - t^2) dt = \\ &= i \left(t - it^2 - \frac{t^3}{3} \right)_0^1 + \left(-t + it^2 + \frac{t^3}{3} \right)_{-1}^1 - i \left(t + it^2 - \frac{t^3}{3} \right)_0^1 = \\ &= i + 1 - \frac{i}{3} - 1 + i + \frac{1}{3} - 1 - i + \frac{1}{3} - i + 1 + \frac{i}{3} = \frac{2}{3} \\ \int_{C_3} \bar{z} dz &= \int_0^1 (-1 - it)i dt + \int_{-1}^1 (-i + t) dt + \int_1^0 (1 - it)i dt = \\ &= i \left(-t - i\frac{t^2}{2} \right)_0^1 + \left(-it + t \right)_{-1}^1 - i \left(t - i\frac{t^2}{2} \right)_0^1 = \\ &= -i + \frac{1}{2} - i + \frac{1}{2} - i - \frac{1}{2} - i - \frac{1}{2} = -4i \end{aligned}$$

Für $f(z) = z^2$ ergibt jedes Integral den gleichen Wert, für $f(z) = \bar{z}$ hingegen hängt das Ergebnis erheblich vom Integrationsweg ab. z^2 ist holomorph, \bar{z} hingegen nicht, und es wird sich im nächsten Abschnitt zeigen, dass es sich dabei tatsächlich um das entscheidende Kriterium handelt.

Beispiel: Ganz kurz demonstrieren wir noch die Abschätzung für Kurvenintegrale: Wenn C ein Kreis mit Radius R ist, dann erhalten wir als Abschätzung für $\int_C \frac{1}{z} dz$ die Abschätzung

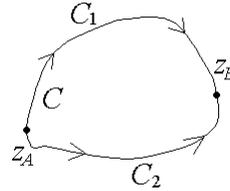
$$\left| \int_C \frac{1}{z} dz \right| \leq \frac{1}{R} \cdot 2\pi R = 2\pi.$$

In diesem Fall hat das Integral (je nach Orientierung) den Wert $\pm 2\pi i$, die Abschätzung paßt also genau. Meist wird man natürlich einen zu großen Wert erhalten.

3.4 Wegunabhängigkeit: Der Cauchysche Integralsatz

Wie schon angekündigt befassen wir uns nun mit der Wegunabhängigkeit von Kurvenintegralen. Bevor wir aber zum zentralen Satz in diesem Zusammenhang kommen, suchen wir zuerst noch nach Möglichkeiten, wie sich die Wegunabhängigkeit noch formulieren läßt:

Dazu betrachten wir den rechts dargestellten geschlossenen Integrationsweg C . Nun wählen wir auf dieser Kurve (oder genauer auf ihrem Bild) zwei beliebige Punkte z_A und z_E . Es gibt nun zwei Wege, die von z_A nach z_E laufen, nämlich C_1 und C_2 . Bei Wegunabhängigkeit ist $\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$. Außerdem ist für beliebige Kurvenintegrale $\int_{-C} f(z)dz = -\int_C f(z)dz$. Für das Integral über die ganzen Schlinge erhält man im Falle von Wegunabhängigkeit also (man beachte die Orientierung von C_2)



$$\oint_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{-C_2} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz - \int_{C_2} f(z)dz = 0.$$

Das bedeutet: Bei Wegunabhängigkeit ist jedes Integral über einen geschlossenen Weg gleich Null, und umgekehrt: Ist das Integral einer Funktion über *jeden* geschlossenen Weg gleich Null, so liegt Wegunabhängigkeit vor.

Noch eine andere Umschreibung der Wegunabhängigkeit gibt es: Wenn es zu f eine andere Funktion F mit $\frac{dF}{dz} = f$ gibt, so nennt man diese wie im Reellen eine Stammfunktion, und analog zum Reellen ist $\int_{z_A \rightarrow z_E} f(z)dz = F(z_E) - F(z_A)$, wobei $z_A \rightarrow z_E$ ein beliebiger Weg mit Anfangspunkt z_A und Endpunkt z_E ist. Wenn eine Stammfunktion existiert, liegt also Wegunabhängigkeit vor. Umgekehrt kann man im Falle von Wegunabhängigkeit immer eine Stammfunktion mittels $F(z) = \int_{z_0 \rightarrow z} f(\zeta)d\zeta$ konstruieren. Wegunabhängigkeit und Existenz einer Stammfunktion sind also ebenfalls äquivalent.

Unter welchen Voraussetzungen liegt aber nun Wegunabhängigkeit von Kurvenintegralen vor? Dazu erinnern wir daran, dass ja Real- und Imaginärteil eines komplexen Kurvenintegrals jeweils reelle Kurvenintegrale sind. $\int_C f(z)dz$ wird also dann wegunabhängig sein, wenn das auf die beiden reellen Integrale $\int_C (u dx - v dy)$ und $\int_C (v dx + u dy)$ zutrifft.

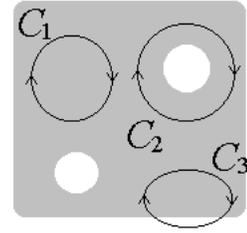
Die reelle Integrabilitätsbedingung $\frac{\partial v_j}{\partial x_k} = \frac{\partial v_k}{\partial x_j}$ ergibt für das erste Integral $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ und für das zweite $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$, also genau die Cauchy-Riemann-Gleichungen! Kurvenintegrale über holomorphe Funktionen sind also wegunabhängig. Allerdings müssen wir dieses Ergebnis noch ein wenig präzisieren, was die erlaubten Integrationswege angeht:

CAUCHYSCHER INTEGRALSATZ

G sei ein einfach zusammenhängendes Gebiet und f sei darin holomorph. Dann gilt, sofern alle betrachteten Wege ganz in G liegen:

- Für jeden geschlossenen Weg C ist $\oint_C f(z)dz = 0$.
- Für zwei beliebige Wege C_1 und C_2 mit gleichem Anfangs- und Endpunkt ist $\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$.
- Zu $f(z)$ existiert eine Stammfunktion $F(z)$ mit $\frac{dF}{dz} = f$ und $\int_{z_A \rightarrow z_E} f(z)dz = F(z_E) - F(z_A)$.

Dazu gibt es natürlich einige Anmerkungen: Zunächst einmal ist es wesentlich, dass ein *einfach* zusammenhängendes Gebiet vorausgesetzt wird. Die Funktion $f(z) = \frac{1}{z}$ etwa ist in jedem Punkt mit Ausnahme von $z = 0$ holomorph, und trotzdem ergibt das Integral auf einem Kreis um den Ursprung nicht den Wert Null. Schon ein einzelner Punkt kann also die Wegunabhängigkeit zerstören. Im Bild rechts ist das Holomorphiegebiet einer Funktion f grau schattiert. Es ist zwar sicher $\oint_{C_1} f(z) dz = 0$, nicht unbedingt aber $\oint_{C_2} f(z) dz$ oder $\oint_{C_3} f(z) dz$.



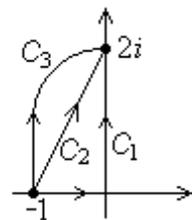
Eine direkte Folgerung aus dem Cauchyschen Integralsatz ist weiter, dass Integrationswege innerhalb des Holomorphiegebietes einer Funktion beliebig deformiert werden können. Das ist mit ein Grund, warum man sich bevorzugt mit Geraden und Kreisen als Integrationswegen befasst. Bei einem holomorphen Integranden kann ja ohnehin wieder jeder Weg in diese Form gebracht werden.

Schließlich und endlich ist die hier gebrachte Formulierung des Cauchyschen Integralsatzes zwar richtig, ihre Voraussetzungen können aber noch weiter gefaßt werden. Für einen logisch einwandfreien Aufbau der Funktionentheorie wählt man einen beliebigen Punkt $z^* \in G$ und fordert zwar Stetigkeit von f in ganz G , Holomorphie aber nur in $G \setminus \{z^*\}$. Diese Formulierung ist zwar eher technischer Natur (denn es zeigt sich, dass eine Funktion, die diese Voraussetzungen erfüllt, ohnehin in z^* ebenfalls holomorph ist), aber für den Beweis der im nächsten Abschnitt vorgestellten Cauchyschen Integralformel notwendig.

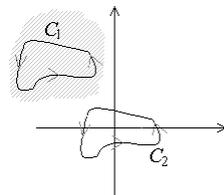
Nun aber genug der Theorie, kommen wir zu einigen Anwendungen: Im Falle holomorpher Integranden kann man mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes die Berechnung von Kurvenintegralen stark vereinfachen: Es genügt ja, eine Stammfunktion aufzufinden und dort Anfangs- und Endpunkte der Kurve einzusetzen. Auch bei einem Integranden, der nicht überall holomorph ist, kann man immer noch im Holomorphiegebiet die Integrationswege geeignet verformen und sich so das Leben oft erheblich erleichtern.

Beispiel: Als erstes berechnen wir die Integrale $\int_{C_k} e^{\pi z} dz$ entlang der Kurven C_1 bis C_3 :

Auf die direkte Art müßten wir jetzt erst einmal die Wege parametrisieren und dann insgesamt fünf komplexe Integrale auswerten. Nun ist aber der Integrand $f(z) = e^{\pi z}$ holomorph und besitzt die Stammfunktion $\frac{1}{\pi} e^{\pi z}$. Da alle drei Kurven den gleichen Anfangs- und Endpunkt haben, nämlich $z_A = -1$ und $z_E = 2i$, ist $\int_{C_1} e^{\pi z} dz = \int_{C_2} e^{\pi z} dz = \int_{C_3} e^{\pi z} dz = \frac{e^{2\pi i} - e^{-\pi}}{\pi} = \frac{1 - e^{-\pi}}{\pi}$. Das würde natürlich auch für jeden anderen Weg mit gleichem Anfang und Ende gelten, egal wie kompliziert er auch sein mag.

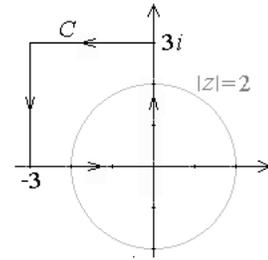


Beispiel: Als nächstes berechnen wir die beiden Integrale $\oint_{C_1} \frac{1}{z} dz$ und $\oint_{C_2} \frac{1}{z} dz$. Die dargestellten Wege wäre zwar recht schwierig zu parametrisieren, das ist aber auch gar nicht nötig. Der Integrand $\frac{1}{z}$ ist nämlich überall außer bei $z = 0$ holomorph, also sicher auch in dem grau schattierten einfach zusammenhängenden Gebiet. Dort ist also jedes Integral über einen geschlossenen Weg Null, und wir können sofort sagen: $\oint_{C_1} \frac{1}{z} dz = 0$.



Im zweiten Fall ist es zwar nicht ganz so einfach, denn hier umläuft der Integrationweg den Nullpunkt, es läßt sich jetzt also kein geeignetes einfach zusammenhängendes Gebiet finden. Allerdings ist der Integrand außerhalb von $z = 0$ holomorph, der Integrationsweg darf also beliebig verformt werden, zum Beispiel auch zu einem Kreis – und für diesen Fall haben wir schon früher das Ergebnis $2\pi i$ erhalten, also $\oint_{C_2} \frac{1}{z} dz = 2\pi i$.

Beispiel: Wir wollen nun für die Funktion $f(z) = \begin{cases} |z| & \text{für } |z| < 2 \\ z & \text{für } |z| \geq 2 \end{cases}$ das Integral $\int_C f(z)dz$ entlang der rechts dargestellten Kurve berechnen. Der Integrand $f(z)$ ist außerhalb des Kreises $|z| = 2$ holomorph und besitzt die Stammfunktion $F(z) = \frac{z^2}{2}$. Damit ergibt sich für das Integral von $2i$ bis -2 der Wert



$$\int_{z=2i}^{-2} z dz = \frac{z^2}{2} \Big|_{2i}^{-2} = \frac{(-2)^2}{2} - \frac{(2i)^2}{2} = 2 - (-2) = 4.$$

Innerhalb des Kreises müssen wir parametrisieren, etwa für den ersten Teil des Weges (von -2 nach 0) $z(t) = -2 + t$, $t \in [0, 2]$, für den zweiten (von 0 nach $2i$) $z(t) = it$, $t \in [0, 2]$. Damit erhält man für die Integrale:

$$\begin{aligned} \int_{C_1} f(z)dz &= \int_{C_1} |z|dz = \int_0^2 |-2 + t| dt = \int_0^2 (2 - t) dt = 2t \Big|_0^2 - \frac{t^2}{2} \Big|_0^2 = 2 \\ \int_{C_2} f(z)dz &= \int_{C_2} |z|dz = \int_0^2 |it| i dt = i \int_0^2 t dt = i \frac{t^2}{2} \Big|_0^2 = 2i \end{aligned}$$

Das gesamte Integral hat also den Wert $\oint_C f(z)dz = 4 + 2 + 2i = 6 + 2i$.

3.5 Die Cauchysche Integralformel

Aus dem Cauchyschen Integralsatz folgt mit wenig Aufwand die in vieler Hinsicht zentrale Formel der Funktionentheorie, die Cauchysche Integralformel. Davor müssen wir uns aber noch ein wenig mit der Thematik der Windungszahlen befassen.

Dazu wählen wir einen beliebigen Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und einen positiv orientierten Kreis C , wobei z_0 nicht auf C (oder genauer dem Bild C^*) liegen soll. Nun wollen wir das Integral

$$\oint_C \frac{1}{z - z_0} dz$$

berechnen. Dabei müssen wir zwei Fälle unterscheiden: So könnte z_0 außerhalb des Kreises liegen. In diesem Fall ist das Integral Null (da der Integrand ja in einem geeigneten einfach zusammenhängenden Gebiet holomorph ist). Liegt z_0 hingegen innerhalb und wird der Kreis n -mal positiv (gegen den Uhrzeigersinn) durchlaufen, so erhält man das Ergebnis $n2\pi i$, bei n Umläufen im negativen Sinne (im Uhrzeigersinn) wird das zu $-n2\pi i$. Man kann also sagen, das obige Integral zählt, wie oft der Punkt z_0 von der Kurve C umlaufen wird.

Nun verallgemeinern wir das für beliebige Kurven, indem wir den *Index* (auch *Windungszahl*) einer Kurve C bezüglich eines Punktes z_0 definieren als

$$\text{Ind}_C(z_0) := \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{1}{z - z_0} dz. \quad (3.7)$$

Dabei soll z_0 natürlich weiterhin nicht auf C liegen. Der Index gibt also an, wie oft ein Punkt von einer speziellen Kurve umlaufen wird, das Vorzeichen sagt zusätzlich, ob im oder gegen den Uhrzeigersinn.

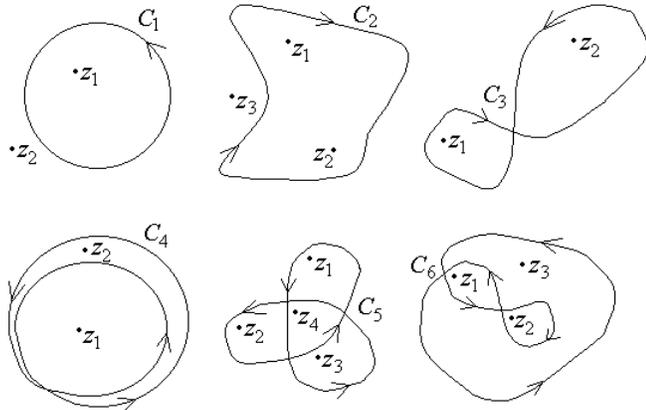
Beispiel: Wir ermitteln nun die Windungszahlen $\text{Ind}_{C_k}(z_j)$ der folgenden Punkte bezüglich der folgenden Kurven C_1 bis C_6 .

Für die erste Kurve erhalten wir $\text{Ind}_{C_1}(z_1) = +1$, denn dieser Punkt wird einmal mathematisch positiv umlaufen. Weiters ist $\text{Ind}_{C_1}(z_2) = 0$.

Die Kurve C_2 wird mathematisch negativ durchlaufen, es ist $\text{Ind}_{C_2}(z_1) = \text{Ind}_{C_2}(z_2) = -1$, und klarerweise erhalten wir $\text{Ind}_{C_2}(z_3) = 0$.

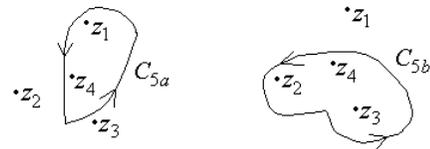
C_3 umläuft den Punkt z_1 negativ, z_2 hingegen positiv, also $\text{Ind}_{C_3}(z_1) = -1$ und $\text{Ind}_{C_3}(z_2) = +1$.

Die Kurve C_4 umläuft den Punkt z_2 einmal, z_1 zweimal im positiven Sinne; es ist also $\text{Ind}_{C_4}(z_1) = +2$ und $\text{Ind}_{C_4}(z_2) = +1$.



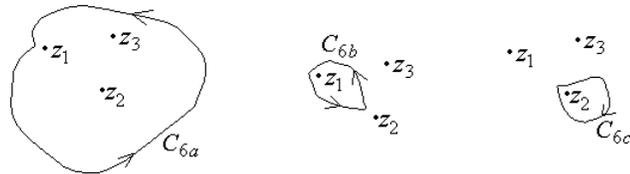
Bisher waren die Windungszahlen hoffentlich intuitiv einsichtig. Bei komplizierteren Kurven wie etwa C_5 oder C_6 ist das nicht mehr unbedingt der Fall. Wie groß ist etwa $\text{Ind}_{C_5}(z_4)$? Null, Eins, Zwei oder vielleicht doch Drei? In solchen Fälle hilft es, die Kurven in geschlossene Teilstücke zu zerlegen, die nur mehr einmal in positiver oder negativer Richtung durchlaufen werden.

Für C_5 könnte das etwa so aussehen wie rechts dargestellt. Natürlich gibt es noch andere Möglichkeiten der Zerlegung; eine ist so gut wie die andere. Auf jeden Fall überlegt man sich nun die Windungszahlen für jede Teilkurve getrennt und addiert am Ende die Ergebnisse.



In unserem Fall ist $\text{Ind}_{C_{5a}}(z_1) = \text{Ind}_{C_{5a}}(z_4) = +1$ bzw. $\text{Ind}_{C_{5b}}(z_2) = \text{Ind}_{C_{5b}}(z_3) = \text{Ind}_{C_{5b}}(z_4) = +1$, alle anderen Windungszahlen sind Null. Nun addiert man die Ergebnisse und erhält: $\text{Ind}_{C_5}(z_1) = \text{Ind}_{C_5}(z_2) = \text{Ind}_{C_5}(z_3) = +1$, $\text{Ind}_{C_5}(z_4) = +2$.

Analog kann man bei C_6 vorgehen, hier erhält man drei Teilstücke und die Windungszahlen $\text{Ind}_{C_{6a}}(z_1) = \text{Ind}_{C_{6a}}(z_2) = \text{Ind}_{C_{6c}}(z_3) = +1$, $\text{Ind}_{C_{6b}}(z_1) = +1$ sowie $\text{Ind}_{C_{6c}}(z_2) = -1$.



Das Gesamtergebnis ist also $\text{Ind}_{C_6}(z_1) = +2$, $\text{Ind}_{C_6}(z_2) = 0$ und $\text{Ind}_{C_6}(z_3) = 1$. Man sieht: Der Punkt z_2 wird netto gar nicht umlaufen, weil sich eine positive und eine negative Umrundung aufheben.

Für allgemeine geschlossene Wege C nennt man nun die Menge aller Punkte $z \in \mathbb{C} \setminus C^*$ mit $\text{Ind}_C(z) \neq 0$ das Innere von C ($\text{Int}(C)$ von *interior*), jene mit $\text{Ind}_C(z) = 0$ das Äußere ($\text{Ext}(C)$ von *exterior*). Im oberen Beispiel liegt z_2 also per Definition im Äußeren der Kurve.

Auch sonst gibt es zu Windungszahlen noch einiges zu sagen. So ist klarerweise

$$\text{Ind}_{-C}(z_0) = -\text{Ind}_C(z_0).$$

Jene Wege C , für die an allen $z \in \text{Int}(C) \neq \emptyset$ die Windungszahl $\text{Ind}_C(z)$ gleich Eins ist, nennt man *einfach geschlossen*. Im vorigen Beispiel wäre also C_1 einfach geschlossen, C_2 hingegen bereits nicht mehr (alle Windungszahlen im Inneren sind gleich -1).

Mit diesem Vorwissen können wir nun zur zentralen Formel der Funktionentheorie kommen:

CAUCHYSCHES INTEGRALFORMEL

G sei ein einfach zusammenhängendes Gebiet, der geschlossene Weg C verlaufe ganz darin. Die Funktion f sei holomorph in G . Dann gilt für beliebige $z \in G \setminus C^*$:

$$f(z) \text{Ind}_C(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Natürlich kann man die Integralformel auch in der Form

$$\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 2\pi i \cdot f(z) \text{Ind}_C(z)$$

schreiben, so sieht man besonders klar, dass sich bestimmte Typen von Integralen recht leicht mit dieser Formel berechnen lassen werden. Die Aussagen der Cauchyschen Integralformel reichen aber noch viel weiter: So geht aus ihr hervor, dass die Werte einer holomorphen Funktion im Inneren eines Bereichs vollständig durch die Werte am Rand festgelegt sind. (Im Reellen würde die analoge Aussage lauten: Kennt man die Werte einer Funktion an den Grenzen eines Intervalls, dann kennt man auch alle Werte im Inneren – das trifft in \mathbb{R} nur für lineare Funktionen zu.)

Sehr oft betrachtet man als Kurve in der Cauchyschen Integralformel einen einfach positiv durchlaufenen Kreis mit Mittelpunkt z_0 und Radius r . Diesen notiert man meist mit $|z - z_0| = r$ und setzt die positive Orientierung als vereinbart voraus:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

sofern z im Inneren der Kreislinie liegt (sonst ist $f(z) = 0$).

Wählt man nun $z = z_0$, so sieht man, dass der Funktionswert von f an jedem Punkt das arithmetische Mittel der Werte auf jeder beliebigen Kreislinie um den Punkt ist (sofern der Kreis noch ganz im Holomorphiegebiet liegt), das ist die Aussage der Mittelwertgleichung. Noch wichtiger ist aber eine andere Folgerung aus der Integralformel, nämlich, dass sich mit ihrer Hilfe (im Prinzip) Ableitungen beliebig hoher Ordnung berechnen lassen:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta. \quad (3.8)$$

Wesentlich ist dabei, dass für jede holomorphe Funktion Ableitungen beliebig hoher Ordnung existieren; das haben wir zwar früher schon erwähnt, bewiesen kann es allerdings erst mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel werden. Die konkrete Berechnung der Ableitung wird man natürlich in der Regel *nicht* mit dieser Formel durchführen.

Beispiel: Wir zeigen nun noch wie sich gewisse Integrale mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel berechnen lassen. Als erstes Beispiel wählen wir

$$I = \oint_{|z-(1+2i)|=\sqrt{2}} \frac{e^{\pi z} z^2}{z-2i} dz.$$

Der Punkt $z = 2i$ liegt innerhalb des positiv durchlaufenen Kreises, die Integralformel ergibt also

$$I = 2\pi i (e^{\pi z} z^2)_{z=2i} = 2\pi i (e^{2\pi i} \cdot (-4)) = -8\pi i.$$

3.6 Übungsaufgaben

1. Man berechne die folgenden Integrale: a) $\int_0^\pi \frac{e^{it} + 1}{e^{it} + e^{-it}} dt$ b) $\int_{-1}^1 \frac{t+1}{t^2+1} dt$
 c) $\int_0^1 (t^3 + (i+1)t^2 + (i-1)t + 2i) dt$ d) $\int_0^1 \frac{2t}{t^2 + (1+i)t + i} dt$

a) Man hüte sich vor der verlockenden Substitution $u = e^{it}$, da man dabei die reelle Achse verläßt und entlang eines Halbkreises integrieren muss. Verlässlich ist dagegen die Aufspaltung:

$$\int_0^\pi \frac{e^{it} + 1}{e^{it} + e^{-it}} dt = \int_0^\pi \frac{\cos(t) + i \sin(t) + 1}{2 \cos(t)} dt = \frac{1}{2} \int_0^\pi dt + \frac{i}{2} \underbrace{\int_0^\pi \tan t dt}_{=0} + \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^\pi \frac{dt}{\cos t}}_{=0} = \frac{\pi}{2}$$

Für b) setzen wir eine komplexe Partialbruchzerlegung an:

$$\frac{t+1}{t^2+1} = \frac{A}{t+i} + \frac{B}{t-i} \quad t+1 = A(t-i) + B(t+i)$$

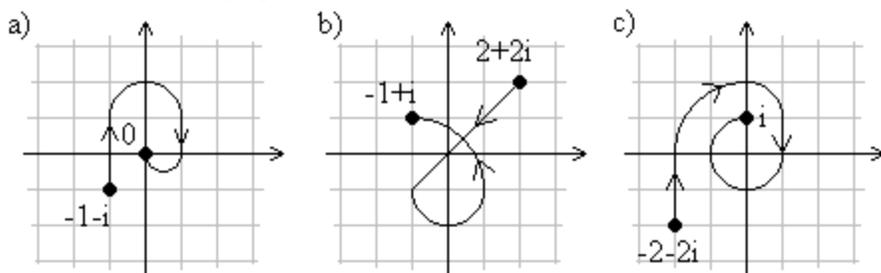
Einsetzen (Polstellenmethode) liefert:

$$t = +i: \quad B = \frac{1+i}{2i} \quad t = -i: \quad A = \frac{-1+i}{2i}$$

Für das Integral erhalten wir also:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 \frac{t+1}{t^2+1} du = \frac{-1+i}{2i} \int_{-1}^1 \frac{1}{t+i} du + \frac{1+i}{2i} \int_{-1}^1 \frac{1}{t-i} du = \\ &= \frac{-1+i}{2i} \log(t+i) \Big|_{-1}^1 + \frac{1+i}{2i} \log(t-i) \Big|_{-1}^1 = \\ &= \frac{-1+i}{2i} (\log(1+i) - \log(-1+i)) + \frac{1+i}{2i} (\log(1-i) - \log(-1-i)) = \\ &= \frac{-1+i}{2i} \left(\ln \sqrt{2} + i\frac{\pi}{4} - \ln \sqrt{2} - i\frac{3\pi}{4} \right) + \frac{1+i}{2i} \left(\ln \sqrt{2} - i\frac{\pi}{4} - \ln \sqrt{2} + i\frac{3\pi}{4} \right) = \\ &= \frac{1-i}{2i} \frac{i\pi}{2} + \frac{1+i}{2i} \frac{i\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

2. Man parametrisiere die folgenden Kurven:



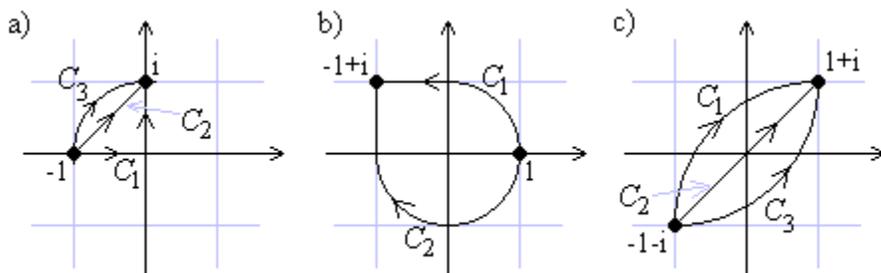
Die Kurve in a) läßt sich beispielsweise auf die folgende Art darstellen:

$$C_a: z(t) = -1 - i + 2it \quad t \in [0, 1] \quad C_b: z(t) = i + e^{it} \quad t \in [\pi, 0]$$

$$C_c: z(t) = 1 + i - it \quad t \in [0, 1] \quad C_d: z(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-it} \quad t \in [0, \pi]$$

Daneben gibt es natürlich noch viele andere Möglichkeiten der Parametrisierung, die alleamt richtig sind.

3. Man berechne die Integrale $\int_{C_k} \bar{z} dz$, $\int_{C_k} \operatorname{Re} z dz$, $\int_{C_k} e^{\pi z} dz$ und $\int_{C_k} z^5 dz$ entlang der im folgenden dargestellten Kurven:



a) Zuerst müssen wir möglichst einfache Parametrisierungen für die Kurven finden. Eine Möglichkeit wäre etwa:

$$C_1: z(t) = t \quad t \in [-1, 0] \quad dz = dt$$

$$z(t) = it \quad t \in [0, 1] \quad dz = i dt$$

$$C_2: z(t) = -1 + (1+i)t \quad t \in [0, 1] \quad dz = (1+i)dt$$

$$C_3: z(t) = e^{it} \quad t \in [\pi, \frac{\pi}{2}] \quad dz = ie^{it} dt$$

Nun können wir auch die Kurvenintegrale berechnen. Für die Integrale über \bar{z} und $\operatorname{Re} z$ müssen wir die Parametrisierung der Kurven verwenden, bei $e^{\pi z}$ und z^5 genügt es wegen der Holomorphie des Integranden, eine Stammfunktion zu finden (oder das Integral über einen Weg zu bestimmen).

$$\int_{C_1} \bar{z} dz = \int_{-1}^0 \bar{t} dt + \int_0^1 \overline{it} i dt = \int_{-1}^0 t dt + \int_0^1 t dt = \frac{t^2}{2} \Big|_{-1}^0 + \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

$$\int_{C_2} \bar{z} dz = \int_0^1 \overline{(-1 + (1+i)t)} (1+i) dt = (1+i) \int_0^1 (-1 + (1-i)t) dt =$$

$$= (1+i) \left(-1 + (1-i) \frac{1}{2} \right) = -1 - i + |1+i|^2 \frac{1}{2} = -i$$

$$\int_{C_3} \bar{z} dz = \int_{\pi}^{\pi/2} e^{-it} i e^{it} dt = -i \int_{\pi}^{\pi/2} e^{-it} e^{it} dt = -i \int_{\pi/2}^{\pi} dt = -i \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned}
\int_{C_1} \operatorname{Re} z \, dz &= \int_{-1}^0 \operatorname{Re} t \, dt + \int_0^1 \operatorname{Re}(it) i \, dt = \int_{-1}^0 t \, dt + \int_0^1 0 \, dt = \frac{t^2}{2} \Big|_{-1}^0 = -\frac{1}{2} \\
\int_{C_2} \operatorname{Re} z \, dz &= \int_0^1 \operatorname{Re}((-1 + (1+i)t)) (1+i) \, dt = (1+i) \int_0^1 (-1+t) \, dt = \\
&= (1+i) \left(-1 + \frac{1}{2}\right) = -\frac{1+i}{2} \\
\int_{C_3} \operatorname{Re} z \, dz &= \int_{\pi}^{\pi/2} \operatorname{Re}(e^{it}) i e^{it} \, dt = -i \int_{\pi/2}^{\pi} \cos t e^{it} \, dt = -i \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} e^{it} \, dt = \\
&= -\frac{i}{2} \left\{ \int_{\pi/2}^{\pi} e^{2it} \, dt + \int_{\pi/2}^{\pi} dt \right\} = -\frac{i}{2} \left\{ \frac{e^{2i\pi} - e^{i\pi}}{2i} + \frac{\pi}{2} \right\} = -\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} \\
\int_{C_k} e^{\pi z} \, dz &= \frac{e^{\pi z}}{\pi} \Big|_{z=i} - \frac{e^{\pi z}}{\pi} \Big|_{z=-1} = \frac{e^{i\pi} - e^{-\pi}}{\pi} = -\frac{1 + e^{-\pi}}{\pi} \\
\int_{C_k} z^5 \, dz &= \frac{z^6}{6} \Big|_{z=i} - \frac{z^6}{6} \Big|_{z=-1} = \frac{i^6 - (-1)^6}{6} = -\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

4. Man berechne die Integrale $\int_C \bar{z} \, dz$, $\int_C (z^4 + z^2) \, dz$ und $\int_C \sin(\pi z) \, dz$ entlang der drei Kurven aus Aufgabe 2.

5. Man berechne die folgenden Integrale:

- $\oint_C \frac{e^z}{z-2} \, dz$ entlang der positiv orientierten Kreise $|z|=3$ und $|z|=1$
- $\oint_C \frac{\sin 3z}{z + \frac{\pi}{2}} \, dz$ entlang des positiv orientierten Kreises $|z|=5$
- $\oint_C \frac{e^{3z}}{z - \pi i} \, dz$ entlang der positiv orientierten Kurven $|z-1|=3$ und $|z-2|+|z+2|=6$

a) Der Zähler e^z des Integranden ist eine in ganz \mathbb{C} holomorphe Funktion, wir können also die Cauchysche Integralformel anwenden und erhalten mit $\operatorname{Ind}_{|z|=3}(+2) = 1$:

$$\oint_{|z|=3} \frac{e^z}{z-2} \, dz = 2\pi i \cdot e^2 \cdot \operatorname{Ind}_{|z|=3}(+2) = 2\pi i e^2$$

Für $|z| \leq 1$ ist der Integrand holomorph, und der Cauchysche Integralsatz ergibt:

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z-2} \, dz = 0.$$

Das gleiche Ergebnis liefert wegen $\operatorname{Ind}_{|z|=1}(+2) = 0$ natürlich auch die Cauchysche Integralformel.

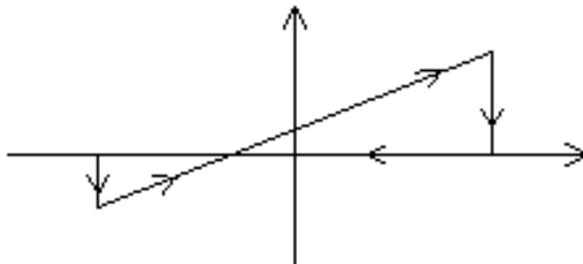
6. Gegeben sind die Funktion $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ und die Kurve $C : z(t) = 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Man berechne $\|f\|_C = \max_{z \in C^*} |f(z)|$ und gewinne daraus eine Abschätzung für $\int_C f(z) \, dz$. Anschließend ermittle man den exakten Wert des Integrals.

7. Man zeige

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2-bx} dx = \sqrt{\frac{\pi}{4|a|}} e^{\frac{b^2}{4a}} e^{-\frac{i}{2}\text{Arg } a}$$

für $a, b \in \mathbb{C}$ und $\text{Re } a > 0$.

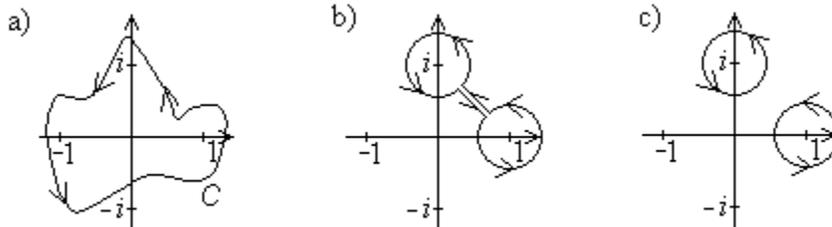
(Hinweise: Quadratische Ergänzung; Anwendung des Cauchyschen Integralsatzes auf den unten dargestellten Integrationsweg; Benutzung von $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$).



8. Man berechne das Integral

$$I = \oint_C \frac{dz}{z^2 - (1+i)z + i}$$

entlang der in der folgenden Abbildung unter a) dargestellten Kurve C. (Hinweis: Eine Partialbruchzerlegung ist nützlich; vor allem überlege man sich, wie sich der Integrationsweg deformieren läßt und welche Werte die Integrale in c) haben.)



Wir spalten die Rechnung der Übersichtlichkeit halber in mehrere Schritte auf:

- Zunächst einmal überprüfen wir, für welche $z \in \mathbb{C}$ der Integrand nicht definiert ist. Für die quadratische Gleichung $z^2 - (1+i)z + i = 0$ erhalten wir als Lösungen $z_1 = 1$ und $z_2 = +i$. Überall sonst ist der Integrand holomorph.
- Nun zerlegen wir den Integranden in Partialbrüche. Dazu setzen wir an:

$$\frac{1}{(z-1)(z-i)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-i} \iff 1 = A \cdot (z-i) + B \cdot (z-1)$$

und erhalten durch Einsetzen (Polstellenmethode):

$$\begin{aligned} z = 1 : 1 &= A(1-i) & A &= \frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{2} \\ z = i : 1 &= A(i-1) & B &= \frac{1}{-1+i} = -\frac{1+i}{2} \end{aligned}$$

Die selben Ergebnisse liefert natürlich auch ein Koeffizientenvergleich $1 = (A+B)z - (Ai+B)$. Auf jeden Fall erhält man:

$$\frac{1}{(z-1)(z-i)} = \frac{1+i}{2} \frac{1}{z-1} - \frac{1+i}{2} \frac{1}{z-i}$$

- Nun berechnen wir die Integrale über die beiden in c) dargestellten Kreise $|z - 1| = r$ und $|z - i| = r$, wobei $r < \sqrt{2}$ ist. Hier kommt uns bereits die Partialbruchzerlegung zugute, denn jeweils einer der Terme $\frac{1}{z-1}$ und $\frac{1}{z-i}$ ist auf und in einem der Kreise holomorph, das Wegintegral also Null. Übrig bleibt nur:

$$I_1 = \frac{1+i}{2} \oint_{|z-1|=r} \frac{1}{z-1} dz = \frac{1+i}{2} 2\pi i$$

$$I_i = -\frac{1+i}{2} \oint_{|z-i|=r} \frac{1}{z-i} dz = -\frac{1+i}{2} 2\pi i$$

Das gleiche Ergebnis hätten wir mit mehr Aufwand natürlich auch aus der Cauchy-schen Integralformel erhalten.

- Jetzt kommt der entscheidende Schritt: Außerhalb von $z = +1$ und $z = +i$ ist der Integrand holomorph, deshalb läßt sich der Integrationsweg dort beliebig verformen, zum Beispiel auch so wie in b) dargestellt. Läßt man die Geradenstücke nahe aneinanderrücken, so wird am Ende die gleiche Strecke zweimal in entgegengesetzter Richtung durchlaufen und das Integral liefert keinen Beitrag mehr. Unser Ergebnis lautet demnach also $I = I_1 + I_i = 0$.

Die hier vorgestellte Vorgehensweise ist schon sehr ähnlich jener, mit der im nächsten Kapitel der Residuensatz eingeführt wird.

9. Man berechne das (reelle) Integral

$$I = \int_0^{2\pi} (\cos x)^{2p} dx \quad \text{mit } p \in \mathbb{N}$$

Hinweis: Den Cosinus mit Hilfe von komplexen Exponentialfunktionen anschreiben, den binomischen Satz verwenden.

10. Man beweise die Cauchysche Integralformel, wobei der Cauchysche Integralsatz unter schwächeren Voraussetzungen (f holomorph in $G \setminus \{z^*\}$ und stetig in G , $z^* \in G$ beliebig) verwendet werden kann. (Hinweis: Betrachte die Hilfsfunktion $g(\zeta) = \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}$ für $\zeta \neq z$. Wie kann diese Funktion für $\zeta = z$ stetig ergänzt werden?)

11. Aus der Cauchyschen Integralformel für $f^{(n)}$ leite man die Cauchysche Ungleichung

$$|f^{(n)}| \leq \frac{n!}{r^{n+1}} \max_{|\zeta-z_0|=r} |f(\zeta)|$$

ab, wobei f holomorph in einem Gebiet G und der Punkt $z_0 \in G$ ist; $r > 0$ sei dabei so, dass die abgeschlossene Kreisscheibe $\overline{D_r(z_0)}$ ganz in G liegt. Damit beweise man weiter den Satz von Liouville (eine auf ganz \mathbb{C} holomorphe Funktion, die beschränkt ist, ist konstant).

12. G sei ein zweifach zusammenhängendes Gebiet, f sei holomorph in G , C_1 und $-C_2$ seien zwei einfach geschlossene Wege, wobei f in $\text{int}(C_1) \setminus \text{int}(C_2)$ holomorph ist. Dann ist $\int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz = 0$ (Cauchyscher Integralsatz für zweifach zusammenhängende Gebiete). Man beweise diesen Sachverhalt mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes und verallgemeinere ihn auf n -fach zusammenhängende Gebiete.

Kapitel 4

Laurentreihen und Residuensatz

Potenzreihen sind aus der reellen Analysis schon längst bekannt, und auch im Komplexen haben sie eine große Bedeutung; so haben wir schon die elementaren Funktionen mit ihrer Hilfe eingeführt, nun widmen wir uns ihnen noch ein wenig genauer. Im nächsten Abschnitt wird die Potenzreihe dann weiter zur Laurentreihe verallgemeinert.

Die Entwicklung von Funktionen in Laurentreihen wird uns auch eine Zeitlang beschäftigen. Mit Hilfe dieser „verallgemeinerten Potenzreihen“ können wir nun endlich die Singularitäten von Funktionen vernünftig klassifizieren, vor allem aber einen letzten zentralen Satz ableiten, der gewissermaßen die Krönung der Funktionentheorie darstellt: den Residuensatz.

Nicht nur, dass man mit seiner Hilfe viele komplexe Kurvenintegrale durch simples Abzählen und Einsetzen ermitteln kann, auch in der reellen Integrationstheorie hat er enorme Bedeutung: Viele bestimmte Integrale, für die sich keine durch elementare Funktionen darstellbare Stammfunktion finden läßt, kann man auf diesem Weg elegant berechnen.

4.1 Potenzreihen im Komplexen

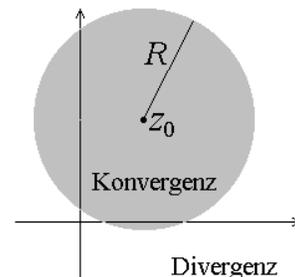
Vieles, was für Potenzreihen im Reellen gilt, kann unverändert ins Komplexe übernommen werden, manche Zusammenhänge werden aber erst dort wirklich sichtbar. Auch für manche Namen gibt es nun plötzlich einleuchtende Erklärungen, so etwa für die Bezeichnung *Konvergenzradius*. Bekanntlich gibt es ja zu jeder Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ eine eindeutig bestimmte Zahl $R \in [0, \infty]$, für die gilt: Die Reihe konvergiert absolut in $(x_0 - R, x_0 + R)$ und divergiert außerhalb von $[x_0 - R, x_0 + R]$. Dieses R kann mit der Formel von Cauchy-Hadamard

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \quad \text{oder auch mit} \quad R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad (4.1)$$

berechnet werden, wobei die zweite Form nur gilt, wenn der Grenzwert auch tatsächlich existiert. R heißt nun eben *Konvergenzradius*, was im reellen Fall nicht unbedingt sehr sinnvoll erscheint. Die Formeln stimmen aber auch im Komplexen: Eine Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

konvergiert absolut innerhalb eines Kreises mit Mittelpunkt z_0 und Radius R , außerhalb divergiert sie.



Beispiel: Wir berechnen die Konvergenzradien der drei Potenzreihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (1+i^n)(z-1)^n \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^{2n}$$

1. Die erste Reihe ist relativ einfach. Mit $a_n = \frac{1}{n}$ erhält man

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n}{1/(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Analog liefert die Formel von Cauchy-Hadamard

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1,$$

also ebenfalls $R = 1$.

2. Der zweite Fall ist nicht mehr ganz so leicht. Nicht dass um $z = +1$ entwickelt wird stört hier, sondern dass man keinen so einfachen Ausdruck für die Koeffizienten a_n mehr erhält. Es ist ja

$$a_n = \begin{cases} 2 & \text{für } n = 4k \\ 1+i & \text{für } n = 4k+1 \\ 0 & \text{für } n = 4k+2 \\ 1-i & \text{für } n = 4k+3 \end{cases} \quad \text{mit } k \in \mathbb{N}_0$$

Ein Grenzwert des Quotienten kann in einem solchen Fall gar nicht existieren, wir müssen also hier auf jeden Fall auf Cauchy-Hadamard zurückgreifen:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} = 1,$$

wir erhalten also wiederum $R = 1$.

3. In der dritten Reihe setzen wir zunächst $u = z^2$ und erhalten $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} u^n$. Nun ergibt sich weiter

$$\begin{aligned} R_u &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n/n!}{(n+1)^{(n+1)}/(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n (n+1)!}{(n+1)^{(n+1)} n!} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n (n+1) n!}{(n+1)^n (n+1) n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

Jetzt erinnern wir uns an $u = z^2$, also ist $R = \sqrt{R_u} = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

Mit diesen Techniken lassen sich im Prinzip beliebige Potenzreihen behandeln.

Innerhalb ihres Konvergenzkreises stellt eine Potenzreihe eine holomorphe Funktion dar, und umgekehrt kann man eine in einem Punkt z_0 holomorphe Funktion in eine Taylorreihe entwickeln:

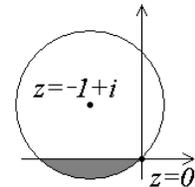
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \quad (4.2)$$

Wenn G das Holomorphiegebiet von f ist, so ist der Konvergenzradius R der Taylorreihe mindestens so groß wie der Abstand r von z_0 zum Rand von G . Er kann aber auch größer sein, wie das folgende Beispiel zeigt:

Beispiel: Die Funktion $f(z) = \text{Log } z$ ist in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$ holomorph. Wenn wir f nun um den Punkt $z = -1 + i$ entwickeln, so erhalten wir

$$f(z) = \text{Log}(-1 + i) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(-1 + i)^n} (z + 1 - i)^n$$

Nach Cauchy-Hadamard hat diese Reihe aber einen größeren Konvergenzradius als 1, nämlich $R = \sqrt{2}$. In diesem Fall bestimmt nicht der Abstand zum Rand des Holomorphiegebietes, sondern jener zur nächsten Singularität ($z = 0$) den Konvergenzradius. Allerdings stellt die erhaltene Reihe für $\text{Im } z < 0$ (grauer Bereich) nicht mehr den Hauptwert $\text{Log } z = \log_0 z$ dar, sondern den Zweig $\log_1 z$.



Historisch war Entwickelbarkeit in Potenzreihen neben der komplexen Differenzierbarkeit der zweite wesentliche Zugang zur Funktionentheorie (WEIERSTRASSSCHER bzw. CAUCHY-RIEMANN'SCHER Zugang). Beide Ansätze sind natürlich äquivalent, je nach Ziel wird sich meist einer der beiden als vorteilhaft erweisen. Viele zentrale Sätze der Funktionentheorie lassen sich am einfachsten mittels Potenzreihen beweisen, so etwa der schon früher erwähnte Identitätssatz für holomorphe Funktionen. Dieser läßt sich übrigens noch ein wenig erweitern; wie die Formel für die Taylorentwicklung vermuten läßt, werden zwei auf G holomorphe Funktionen dort bereits dann übereinstimmen, wenn in einem beliebigen Punkt $z_0 \in G$ alle Ableitungen gleich sind.

Das ist neben den Aussagen der Cauchyschen Integralformel ein weiteres Zeichen für den starken inneren Zusammenhalt holomorpher Funktionen. Man kann eine solche Funktion nicht einfach an einer Stelle abändern, ohne dass das Folgen im ganzen Holomorphiegebiet hätte.

Betrachtungen im Komplexen können auch helfen, Merkwürdigkeiten zu erklären, die im Reellen auftreten. So läßt sich etwa die reelle Funktion $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ um $x = 0$ in eine Potenzreihe entwickeln. Diese Entwicklung gilt allerdings nur für $-1 < x < 1$, was ja klar ist, die Funktion hat schließlich bei $x = \pm 1$ Singularitäten. Aber auch die Taylorreihe von $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ hat um $x = 0$ nur den Konvergenzradius $R = 1$, was rein reell überhaupt nicht einzusehen ist, denn *diese* Funktion ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert und zeigt nicht das geringste bösertige Verhalten.

Doch auch $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ hat Singularitäten im Abstand 1 vom Nullpunkt – nämlich bei $x = \pm i$ (wobei x jetzt natürlich als komplexe Variable aufgefaßt wird). Diese im Reellen überhaupt nicht sichtbaren Punkte beschränken den Konvergenzradius der Reihe auf 1, wirken also direkt auf die Ergebnisse der reellen Analysis zurück.

4.2 Laurentreihen

Eine Möglichkeit den Begriff der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ zu verallgemeinern ist, auch negative Potenzen $(z - z_0)^{-n} = \frac{1}{(z - z_0)^n}$ zu berücksichtigen. Damit erhält man die in der Funktionentheorie enorm wichtigen *Laurentreihen*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n}.$$

Eine solche Reihe ist klarerweise nur dort konvergent, wo beide Teilreihen konvergent sind, und dieses Konvergenzgebiet wollen wir nun bestimmen. Den Term

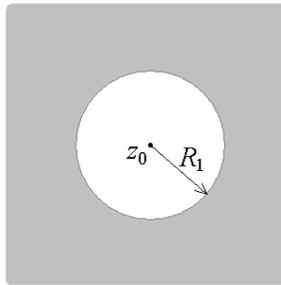
$$H(z) \equiv \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n := \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}$$

nennt man den *Hauptteil* der Laurentreihe, und es zeigt sich, dass für diese „Potenzreihe in $\frac{1}{z-z_0}$ “ ebenfalls ein Konvergenzradius $R_1 = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_{-n}|^{1/n}$ existiert. Allerdings konvergiert die Reihe nur *außerhalb* von (und eventuell auf) $|z-z_0| = R_1$.

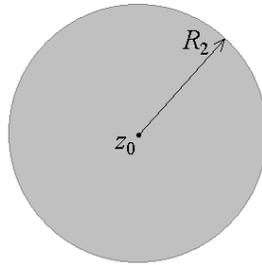
Der „Nebenteil“ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ hat als gewöhnliche Potenzreihe den Konvergenzradius $R_2 = 1/\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}$. Die gesamte Laurentreihe konvergiert also auf einem Kreisring

$$D_{R_1 R_2}(z_0) := \{z \mid R_1 < |z-z_0| < R_2\},$$

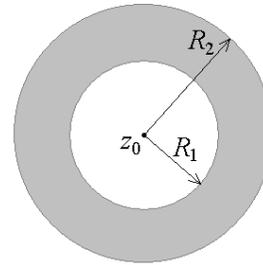
sie divergiert für $|z-z_0| < R_1$ oder $|z-z_0| > R_2$. Punkte mit $|z-z_0| = R_1$ oder $|z-z_0| = R_2$ müssen wie gewohnt gesondert betrachtet werden. In den Fällen $R_2 < R_1$, $R_2 = 0$ oder $R_1 = \infty$ konvergiert die Laurentreihe nirgendwo in \mathbb{C} , für $R_1 = R_2 = R$ höchstens an Punkten z mit $|z-z_0| = R$.



$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n \text{ konv.}$$



$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \text{ konv.}$$



$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n \text{ konv.}$$

Im Kreisring $D_{R_1 R_2}$ stellt die Laurentreihe eine holomorphe Funktion dar, und umgekehrt läßt sich eine in einem Kreisring holomorphe Funktion auch in eine Laurentreihe entwickeln. Für diese Entwicklung erhält man, wenn C ein einfach geschlossener Weg in $D_{R_1 R_2}$ ist und die abgeschlossene Kreisscheibe $\overline{D_{R_1}(z_0)}$ ganz im Inneren von C liegt:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n \quad \text{mit} \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} d\zeta \quad (4.3)$$

Die Formel für die Koeffizienten ist in der Praxis weniger wichtig als es vielleicht den Anschein haben mag. Will man nämlich die Laurentreihe einer Funktion bestimmen, dann ist sie nur der letzte Ausweg, sozusagen ein Akt der Verzweiflung, wenn alles andere versagt. In den meisten interessanten Fällen kann man nämlich die Laurentreihenentwicklung einfach aus einer bereits bekannten Potenzreihe ablesen oder mit Hilfe bestimmter Summenformeln (etwa der für die geometrische Reihe) gewinnen.

Ist f holomorph in $0 < |z-z_0| < \varepsilon$ mit $\varepsilon > 0$, so nennt man den Koeffizienten a_{-1} der dort gültigen Laurent-Entwicklung von f um z_0 das *Residuum* von f an der Stelle z_0 , $\text{Res}(f; z_0)$. Warum gerade dieser Koeffizient so wichtig ist, dass er einen eigenen Namen erhält, werden wir bald sehen.

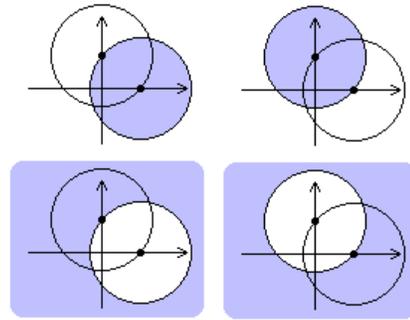
Beispiel: Wir wollen die Laurentreihe von $e^{1/z}$ um den Nullpunkt $z = 0$ herum bestimmen. Die Exponentialfunktion hat dort die Potenzreihendarstellung

$$e^u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} u^n.$$

In diese können wir nun $u = z^{-1}$ einsetzen und erhalten

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^0 \frac{1}{(-n)!} z^n$$

Beispiel: Wir betrachten nun die Laurententwicklung von $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-i)}$. Hier sind vor allem zwei Entwicklungspunkte interessant, nämlich die Singularitäten $z = +1$ und $z = +i$. Ihr Abstand voneinander ist $\sqrt{2}$; insgesamt wird man also vier Laurentreihen erhalten, nämlich für $0 < |z-1| < \sqrt{2}$, für $|z-1| > \sqrt{2}$, für $0 < |z-i| < \sqrt{2}$ und für $|z-i| > \sqrt{2}$. Die expliziten Ausdrücke gewinnt man am besten mit Hilfe der geometrischen Reihe:



$$\begin{aligned} \frac{1}{z-i} &= -\frac{1}{i-z} = -\frac{1}{i-z+1-1} = -\frac{1}{i-1-(z-1)} = -\frac{1}{i-1} \frac{1}{1-\frac{z-1}{i-1}} \\ &= -\frac{1}{i-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-1}{i-1}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{(i-1)^{n+1}} \end{aligned}$$

Der entscheidende Schritt ist dabei die Anwendung von $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$, die nur unter der Bedingung $|q| < 1$ gilt. Daher stimmt diese Entwicklung nur für $|\frac{z-1}{i-1}| < 1$, also für $|z-1| < |i-1| = \sqrt{2}$, aber das ist ja auch genau der Bereich, der uns interessiert. Die übrigen Entwicklungen erhält man auf ähnliche Weise:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-i} &= \frac{1}{z-1-i+1} = \frac{1}{z-1} \frac{1}{1-\frac{i-1}{z-1}} = \frac{1}{z-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i-1}{z-1}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i-1)^n}{(z-1)^{n+1}} \\ \frac{1}{z-1} &= \frac{-1}{1-i-z+i} = \frac{-1}{1-i} \frac{1}{1-\frac{z-i}{1-i}} = \frac{-1}{1-i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-i}{1-i}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(1-i)^{n+1}} \\ \frac{1}{z-1} &= \frac{1}{z-i-1+i} = \frac{1}{z-i} \frac{1}{1-\frac{1-i}{z-i}} = \frac{1}{z-i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1-i}{z-i}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-i)^n}{(z-i)^{n+1}} \end{aligned}$$

In diesen Fällen gelten die Entwicklungen für $|z-1| > \sqrt{2}$, für $|z-i| < \sqrt{2}$ und für $|z-i| > \sqrt{2}$. Die Ergebnisse können wir hier sofort in $f(z)$ einsetzen und erhalten für den Fall $0 < |z-1| < \sqrt{2}$:

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)} \frac{1}{(z-i)} = -\frac{1}{(z-1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{(i-1)^{n+1}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^{n-1}}{(i-1)^{n+1}}$$

Analog ergeben sich die Ausdrücke

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i-1)^n}{(z-1)^{n+2}} \quad f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^{n-1}}{(1-i)^{n+1}} \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-i)^n}{(z-i)^{n+2}}$$

für $|z-1| > \sqrt{2}$, für $0 < |z-i| < \sqrt{2}$ und für $|z-i| > \sqrt{2}$. In diesem Fall hat man beim Einsetzen keinerlei Probleme. Geht es aber um eine Funktion mit mehr als zwei Singularitäten oder eine rationale Funktion (wie zum Beispiel $f(z) = \frac{3z}{(z-1)(z-i)}$), wird die Sache schwieriger, denn man muss ja jeden Term für sich entwickeln. In solchen Fällen hilft meist eine Partialbruchzerlegung, in die man dann wiederum einfach einsetzen kann. Möglich ist das natürlich auch in unserem Beispiel, man erhält klarerweise die selben Ergebnisse, auch wenn sie auf den ersten Blick ein wenig anders aussehen mögen. Eine Ummumerierung der Summen schafft da Abhilfe. Doch auch unsere oben stehenden Ergebnisse können noch ein wenig „kosmetisch“ behandelt werden, indem man die Summationsindizes entsprechend verschiebt:

$$f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{-(i-1)^{n+2}}, \quad 0 < |z-1| < \sqrt{2} \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-2} \frac{(z-1)^n}{(i-1)^{n+2}}, \quad |z-1| > \sqrt{2}$$

$$f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{-(1-i)^{n+2}}, \quad 0 < |z-i| < \sqrt{2} \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-2} \frac{(z-i)^n}{(1-i)^{n+2}}, \quad |z-i| > \sqrt{2}$$

Aus dieser Darstellung können die Koeffizienten a_n nun direkt abgelesen werden.

4.3 Klassifikation von Singularitäten

Mit Hilfe der Laurentreihen ist es nun auch möglich, die Singularitäten, denen wir natürlich früher schon begegnet sind, systematisch einzuordnen. Ganz allgemein ist eine Singularität ein Punkt, an dem eine Funktion nicht definiert ist; wir beschränken unsere Betrachtungen hier auf isolierte Singularitäten ansonsten holomorpher Funktionen. (Wenn es sich dabei nur um Pole handelt, spricht man dann auch von *meromorphen* Funktionen.)

Die Funktion f sei also definiert und holomorph auf $\dot{D}_r(z_0) := \{z \mid 0 < |z-z_0| < r\}$, dort habe sie die Laurententwicklung $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ mit dem Hauptteil $H(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n$. Die Singularität z_0 von f heißt nun

- hebbare Singularität, wenn $a_{-n} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wenn also $H(z) \equiv 0$ ist,
- Pol der Ordnung k , wenn $a_{-k} \neq 0$ und $a_{-n} = 0$ für alle $n > k$ ist, wenn also der Hauptteil die Gestalt $H(z) = \sum_{n=-k}^{-1} a_n(z-z_0)^n$ hat,
- wesentliche Singularität, wenn $a_{-n} \neq 0$ für unendliche viele $n \in \mathbb{N}$ ist, wenn also der Hauptteil nicht durch eine endliche Summe dargestellt wird.

Hebbare Singularitäten und Pole faßt man auch unter der Bezeichnung „außerwesentliche Singularitäten“ zusammen. Gehen wir nun aber ein wenig weiter ins Detail und sehen uns die unterschiedlichen Singularitäten genauer an:

Am angenehmsten zu behandeln sind wohl die *hebbaren Singularitäten*. Für sie gilt, dass der gesamte Hauptteil der Laurententwicklung um sie herum verschwindet, dass also die Funktion in einer Umgebung von z_0 als reine Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

geschrieben werden kann. Dazu äquivalent ist, dass der Grenzwert $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ existiert, er ist dann gleich dem Koeffizienten a_0 der Laurent-Entwicklung. Behebt man die Definitionslücke durch die Festsetzung $f(z_0) := a_0$ so erhält man eine in z_0 holomorphe Funktion.

Beispiel: Typischer Vertreter einer Funktion mit hebbarer Singularität ist $f(z) = \frac{\sin z}{z}$. Für den Sinus erhält man bei Entwicklung um $z = 0$ die Reihe $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \mp \dots$, die Laurent-Reihe der gesamten Funktion ist also

$$f(z) = \frac{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \mp \dots}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} \mp \dots$$

Diese Potenzreihe definiert eine in ganz \mathbb{C} holomorphe Funktion g mit $g(z) = f(z)$ für $z \neq 0$ und $g(0) = \lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 1$.

Um einen *Pol* k -ter Ordnung verschwinden in der Laurententwicklung von f ja alle Koeffizienten a_{-n} mit $n > k$. Multipliziert man also eine solche Funktion mit $(z - z_0)^k$ wird aus dem Pol eine hebbare Singularität, es ist $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^k f(z) = a_{-k}$. Betrachtet man die Funktion selbst, so ist $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$.

Beispiel: Musterbeispiel für eine Funktion mit Polen wäre

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^2 (z - z_1)}.$$

Diese Funktion hat einen Pol zweiter Ordnung in z_0 und einen erster Ordnung in z_1 . Dementsprechend besitzt $(z - z_0)^2 f(z)$ eine hebbare Singularität in $z = z_0$, analog $(z - z_1) f(z)$ in $z = z_1$.

Schließlich und endlich haben wir es noch mit wesentlichen Singularitäten zu tun. Da der Hauptteil der Laurententwicklung in diesem Fall tatsächlich eine unendliche Reihe ist, können sie nicht mittels Multiplikation mit einer Potenz von $(z - z_0)$ in hebbare Singularitäten umgewandelt werden. In der Umgebung einer wesentlichen Singularität z_0 zeigen Funktionen ein ganz erstaunliches Verhalten: So wird in jeder beliebig kleinen Umgebung $U_\varepsilon(z_0)$ jeder Wert $w = f(z) \in \mathbb{C}$ mit höchstens einer Ausnahme angenommen („großer Satz von Picard“).

Beispiel: Eine wesentliche Singularität finden wir etwa bei $f(z) = e^{1/z}$. Wählen wir ein beliebiges $r > 0$ und geben eine (vollkommen beliebige) komplexe Zahl $w \neq 0$ vor. Nun untersuchen wir, ob der Wert w von $e^{1/z}$ tatsächlich innerhalb von $|z| = r$ angenommen wird:

Wenn $w = f(z) = e^{1/z}$ ist, dann ist umgekehrt $z = f^{-1}(w) = \frac{1}{\log w} = \frac{1}{\ln |w| + i \operatorname{Arg} w + i 2\pi k}$. Durch ein genügend großes k (dieses ist ja frei wählbar) kann der Betrag von z beliebig klein gemacht werden, insbesondere also kleiner als r . Es gibt also eine Stelle mit $z = f^{-1}(w)$ und

$|z| < r$, dort ist natürlich $f(z) = w$ – wie es gefordert wurde. Da $w \neq 0$ völlig beliebig war, wird eben jeder derartige Wert von unserer Funktion innerhalb eines beliebig kleinen Kreises stets (sogar unendlich oft) angenommen.

Nun kann man auch erklären, warum die im Reellen unendlich oft differenzierbare Funktion

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

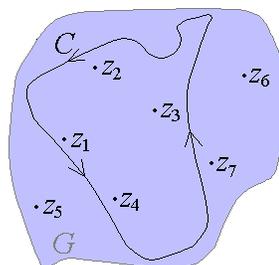
keine „vernünftige“ Taylorentwicklung um $x = 0$ herum hat. (Die Taylorreihe verschwindet identisch und stellt die Funktion daher nur in $x = 0$ selbst dar.) Komplex betrachtet hat f nämlich an $x = 0$ eine wesentliche Singularität, was natürlich jeden Versuch der Entwicklung in eine Potenzreihe scheitern läßt.

Eine Anmerkung noch: Auch Verzweigungspunkte, wie sie im folgenden Kapitel erwähnt werden, zählen zu den Singularitäten, sie lassen sich aber nicht in das eben erwähnte Schema einordnen, da die entsprechenden Funktionen auch in beliebig kleinen punktierten Umgebungen (im bisher betrachteten Sinne) nicht holomorph sind.

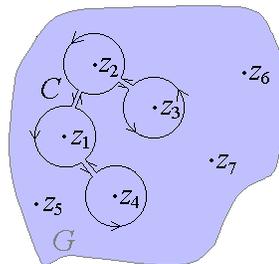
4.4 Der Residuensatz

Wir gehen nun daran, den Residuensatz herzuleiten, wobei wir uns vorläufig an folgendem abstrakten Beispiel orientieren wollen:

Wir möchten das Integral $\oint_C f(z)dz$ berechnen, wobei der Integrand f folgende Eigenschaften hat: Es soll ein einfach zusammenhängendes Gebiet G geben, in dem f mit Ausnahme endlich vieler Punkte z_j , $j = 1, \dots, N$ holomorph ist. Der einfach geschlossene Integrationsweg C soll ganz in $G \setminus \{z_1, \dots, z_N\}$ liegen. Ansonsten aber erlegen wir C keine Beschränkungen auf, der Weg kann beliebig kompliziert sein und vor allem mehrere, sagen wir n Punkte z_j umlaufen.



Wie läßt sich nun das Integral ermitteln? Zuerst erinnern wir uns, dass Integrationswege im Holomorphiegebiet des Integranden beliebig deformiert werden können. Den Weg C können wir also wie rechts dargestellt verformen, ohne dass sich am Wert des Integrals etwas ändert. Wenn man die Geradenstücke eng genug aneinanderrücken läßt, wird schließlich der selbe Weg in zwei verschiedenen Richtungen durchlaufen, die Integrale heben sich weg, und es tragen nur noch die Integrale auf den Kreisen zum Ergebnis bei.



Wir haben also als Zwischenergebnis (da sich die Punkte z_j ohnehin beliebig durchnummerieren lassen, können wir der Einfachheit halber annehmen, dass gerade die ersten n umlaufen wurden)

$$\oint_C f(z)dz = \sum_{j=1}^n \oint_{|z-z_j|=R} f(z)dz$$

erhalten, wobei der Radius R natürlich hinreichend klein sein muss. Nun müssen wir nur mehr die Integrale entlang der Kreise bestimmen. Die Funktion f kann natürlich ganz verschiedene

Gestalt haben, mit Sicherheit aber ist sie jeweils in $\dot{D}_R(z_j)$ holomorph und läßt sich demnach dort in eine Laurentreihe entwickeln. Wir erhalten also:

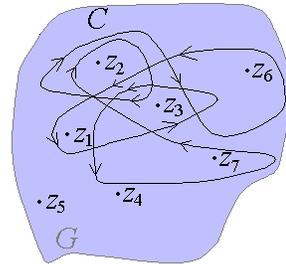
$$\oint_{|z-z_j|=R} f(z)dz = \oint_{|z-z_j|=R} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n dz = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \oint_{|z-z_j|=R} (z-z_0)^n dz,$$

wobei die Vertauschung von Integration und Reihenbildung durch die gleichmäßige Konvergenz der Laurentreihe gerechtfertigt ist. Nun wissen wir aber, dass das Integral $\oint_{|z-z_j|=R} (z-z_0)^n dz$ stets den Wert Null ergibt – außer wenn gerade $n = -1$ ist, dann erhalten wir $2\pi i$. Von den unendlich vielen Termen in der Laurentreihe trägt also nur jener für $n = -1$ zum Integral bei, es bleibt also jeweils nur ein $2\pi i a_{-1}$ übrig. Insgesamt erhalten wir also, wenn wir a_{-1} wie schon früher vereinbart mit Res bezeichnen:

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}(f; z_j)$$

Nun ist auch klar, warum gerade der Koeffizient a_{-1} eine solche Sonderstellung hat – er ist es, der den Wert derartiger Integrale bestimmt.

Bisher haben wir immer von einem *einfach* geschlossenen Weg gesprochen, weil das das Verständnis erleichtert, doch in Wirklichkeit ist das eine völlig unnötige Einschränkung. C könnte ohne weiteres auch so aussehen wie rechts dargestellt, und noch immer bliebe unsere Formel richtig, sofern wir eine kleine Ergänzung anbringen. Für einen k -fach umlaufenen Kreis ergibt das Integral $\oint (z-z_0)^{-1} dz$ ja den Wert $k2\pi i$, wobei k durchaus auch negativ sein darf. Diesen zusätzlichen Faktor müssen wir also noch erfassen.



Mehrfach umlaufene Punkte können wir aber einfach durch die Windungszahl $\text{Ind}_C(z_j)$ berücksichtigen, auch in der Gegenrichtung durchlaufene Punkte werden so gleich mit dem richtigen Vorzeichen erfaßt. Da der Index für überhaupt nicht umlaufene Punkte Null ist, können wir die Summe dann auch über *alle* Punkte $z_j \in G$ erstrecken. Wir erhalten also letztendlich den fundamentalen Zusammenhang:

RESIDUENSATZ

G sei ein einfach zusammenhängendes Gebiet. $z_1, z_2, \dots, z_N \in G$ seien endlich viele (paarweise verschiedene) Punkte. Die Funktion f sei auf $G \setminus \{z_1, \dots, z_N\}$ holomorph. Dann gilt für jeden geschlossene Weg C , der ganz in $G \setminus \{z_1, \dots, z_N\}$ verläuft:

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \cdot \sum_{j=1}^N (\text{Res}(f, z_j) \cdot \text{Ind}_C(z_j))$$

Das Berechnen von Kurvenintegralen ist unter geeigneten Voraussetzungen also auf bloßes Abzählen, Einsetzen und Summieren zurückgeführt – Integrieren für Volksschüler sozusagen. Ein großer Haken scheint allerdings zu bleiben: Während sich die Windungszahlen $\text{Ind}_C(z_0)$ durch bloßes Hinschauen bestimmen lassen, muss man doch, um die Residuen ablesen zu können, die

Funktion f um jede relevante Singularität z_j in eine Laurentreihe entwickeln. Bringt denn der Residuensatz bei dem Aufwand, den das bedeutet, noch wirklich etwas?

Glücklicherweise gib es hier ein Schlupfloch, durch das einem die Laurententwicklung oft erspart bleibt. In den meisten Fällen hat man es nämlich mit Polen k -ter Ordnung zu tun, und bei Entwicklung um diese hat die Laurentreihe die Form

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots$$

Multipliziert man eine solche Funktion mit $(z-z_0)^k$, leitet sie $(k-1)$ -mal nach z ab und setzt dann $z=z_0$, dann bleibt nur mehr der Term $(k-1)!a_{-1}$ übrig.

Man erhält also als Residuum an einem Pol k -ter Ordnung die Formel

$$\text{Res}(f; z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \left[\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left((z-z_0)^k f(z) \right) \right]. \quad (4.4)$$

Speziell für Pole erster Ordnung ergibt sich

$$\text{Res}(f; z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} [(z-z_0) f(z)], \quad (4.5)$$

für Pole zweiter Ordnung erhält man $\text{Res}(f; z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \left[\frac{d}{dz} \left((z-z_0)^2 f(z) \right) \right]$.

Aus der Formel folgt außerdem: Wenn f und g holomorph an z_0 sind und weiters $f(z_0) \neq 0$, $g(z_0) = 0$ und $g'(z_0) \neq 0$ ist, dann gilt:

$$\text{Res} \left(\frac{f}{g}; z_0 \right) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)} \quad (4.6)$$

Auch aus einer Partialbruchzerlegung können die Residuen meist direkt abgelesen werden.

Beispiel: Die Funktion $f(z) = \frac{z}{(z-i)(z+1)^2}$ hat an $z = +i$ einen Pol erster, bei $z = -1$ einen zweiter Ordnung. Für die Residuen an diesen Punkten erhalten wir:

$$\begin{aligned} \text{Res}(f; +i) &= \lim_{z \rightarrow +i} \left\{ (z-i) \frac{z}{(z-i)(z+1)^2} \right\} = \lim_{z \rightarrow +i} \frac{z}{(z+1)^2} = \frac{i}{(1+i)^2} = \frac{1}{2} \\ \text{Res}(f; -1) &= \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d}{dz} \left\{ (z+1)^2 \frac{z}{(z-i)(z+1)^2} \right\} = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d}{dz} \left\{ \frac{z}{(z-i)} \right\} \\ &= \lim_{z \rightarrow -1} \left\{ \frac{z-i-z}{(z-i)^2} \right\} = \frac{-i}{(-1-i)^2} = -\frac{i}{1+2i-1} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Beispiel: Wir berechnen die Residuen von $f(z) = \frac{z+1}{z^4-1}$ an den drei Polen erster Ordnung $z = +1$, $z = +i$ und $z = -i$. (An $z = -1$ liegt eine hebbare Singularität.)

$$\begin{aligned} \text{Res} \left(\frac{z+1}{z^4-1}; +1 \right) &= \frac{z+1}{4z^3} \Big|_{z=+1} = \frac{1}{2} & \text{Res} \left(\frac{z+1}{z^4-1}; +i \right) &= \frac{z+1}{4z^3} \Big|_{z=+i} = \frac{z^2+z}{4z^4} \Big|_{z=+i} = \frac{-1+i}{4} \\ \text{Res} \left(\frac{z+1}{z^4-1}; -1 \right) &= 0 \quad (\text{hebbar}) & \text{Res} \left(\frac{z+1}{z^4-1}; -i \right) &= \frac{z+1}{4z^3} \Big|_{z=-i} = \frac{z^2+z}{4z^4} \Big|_{z=-i} = \frac{-1-i}{4} \end{aligned}$$

Beispiel: Die rationale Funktion f mit der Partialbruchzerlegung

$$f(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{2}{3} \frac{1}{z+2i} - 2 \frac{1}{z-3} + \frac{1}{(z-3)^2}$$

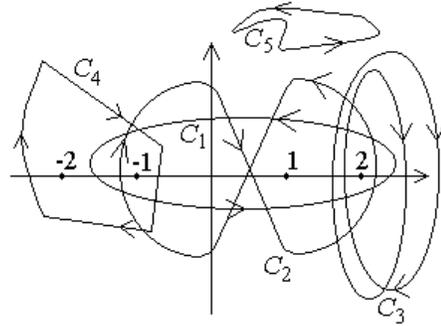
hat die Residuen $\text{Res}(f; +1) = 1$, $\text{Res}(f; -2i) = \frac{2}{3}$ und $\text{Res}(f; +3) = -2$.

Mit diesen Formeln bewaffnet können wir uns nun einigen konkreten Beispielen für den Residuensatz zuwenden. An ihnen wird auch deutlich, welche Vereinfachung der Satz beim Berechnen von vielen Integralen wirklich bedeuten kann.

Beispiel: Wir berechnen dazu die Integrale

$$\int_{C_k} \frac{2z+1}{z^2-z-2} dz$$

entlang der fünf rechts dargestellten Kurven C_1 bis C_5 . Zunächst einmal bestimmen wir Art und Lage der Residuen: Die quadratische Gleichung $z^2 - z - 2 = 0$ hat die beiden Lösungen $z_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$. Also hat $f(z) = \frac{2z+1}{z^2-z-2} = \frac{2z+1}{(z+1)(z-2)}$ zwei Pole erster Ordnung an $z = -1$ und $z = +2$.

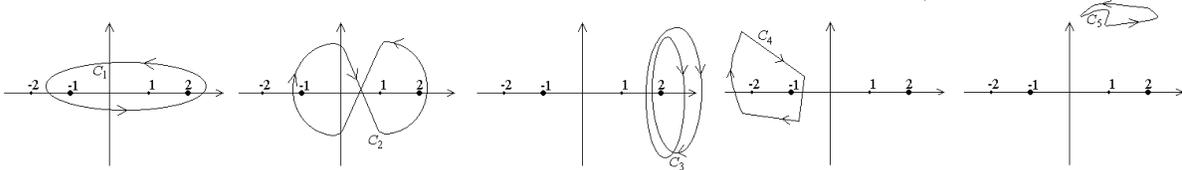


Nun berechnen wir an diesen Stellen die Residuen. Dafür erhält man

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, -1) &= \lim_{z \rightarrow -1} (z+1) \frac{2z+1}{(z+1)(z-2)} = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{2z+1}{z-2} = \frac{-2+1}{-1-2} = \frac{1}{3} \\ \text{Res}(f, +2) &= \lim_{z \rightarrow 2} (z-2) \frac{2z+1}{(z+1)(z-2)} = \lim_{z \rightarrow 2} \frac{2z+1}{z+1} = \frac{4+1}{2+1} = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Im dritten Schritt bestimmen wir die Windungszahlen:

$$\begin{array}{cccccc} \text{Ind}_{C_1}(-1) = +1 & \text{Ind}_{C_2}(-1) = -1 & \text{Ind}_{C_3}(-1) = 0 & \text{Ind}_{C_4}(-1) = -1 & \text{Ind}_{C_5}(-1) = 0 \\ \text{Ind}_{C_1}(+2) = +1 & \text{Ind}_{C_2}(+2) = +1 & \text{Ind}_{C_3}(+2) = -2 & \text{Ind}_{C_4}(+2) = 0 & \text{Ind}_{C_5}(+2) = 0 \end{array}$$



Jetzt steht dem Berechnen der Integrale nichts mehr im Weg:

$$\begin{aligned} \int_{C_1} f(z) dz &= 2\pi i \{ \text{Res}(f, -1) \text{Ind}_{C_1}(f, -1) + \text{Res}(f, +2) \text{Ind}_{C_1}(f, +2) \} = \\ &= 2\pi i \left\{ \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{5}{3} \cdot 1 \right\} = 2\pi i \cdot \frac{6}{3} = 4\pi i \\ \int_{C_2} f(z) dz &= 2\pi i \left\{ \frac{1}{3} \cdot (-1) + \frac{5}{3} \cdot 1 \right\} = 2\pi i \cdot \frac{4}{3} = \frac{8\pi i}{3} \\ \int_{C_3} f(z) dz &= 2\pi i \left\{ \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{5}{3} \cdot (-2) \right\} = 2\pi i \cdot \left(-\frac{10}{3}\right) = -\frac{20\pi i}{3} \\ \int_{C_4} f(z) dz &= 2\pi i \left\{ \frac{1}{3} \cdot (-1) + \frac{5}{3} \cdot 0 \right\} = 2\pi i \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{2\pi i}{3} \\ \int_{C_5} f(z) dz &= 2\pi i \left\{ \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{5}{3} \cdot 0 \right\} = 0 \end{aligned}$$

Das letzte Integral erhält man bereits aus dem Cauchyschen Integralsatz, überhaupt lassen sich sowohl dieser als auch die Cauchysche Integralformel als Spezialfälle des Residuensatzes auffassen (keine Singularität bzw. nur ein Pol erster Ordnung).

4.5 Berechnung reeller Integrale mittels Residuensatz

Wir kommen jetzt zur Rolle des Residuensatzes bei reellen Integralen. Nun ist es keineswegs offensichtlich, dass solche komplexen Kurvenintegrale überhaupt irgendwie helfen können, ein *reelles* Integral $\int_a^b f(x)dx$ zu ermitteln, in vielen Fällen ist aber genau das der Fall.

Im wesentlichen kann das auf zwei Wegen vor sich gehen: Entweder ein reelles Integral wird durch eine geeignete Substitution in ein komplexes Kurvenintegral umgewandelt oder aber man betrachtet eine geschlossene Kurve, die zum Teil auf der reellen Achse verläuft und bei der die Integrale über die anderen Kurvenstücke entweder von vornherein bekannt sind oder überhaupt verschwinden.

Beim ersten Integraltyp, den wir behandeln wollen, kommt die Taktik der Substitution zur Anwendung. Konkret geht es dabei um Integrale über rationale Funktionen von Sinus und Cosinus, also

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt = \int_0^{2\pi} \frac{P(\cos t, \sin t)}{Q(\cos t, \sin t)} dt$$

P und Q stehen dabei für beliebige Polynome in zwei Variablen.

In diesem Fall werden die Mittel der Funktionentheorie nicht unbedingt benötigt, da sich ein solches Integral auch mit rein reellen Methoden auswerten lässt, das kann aber einen gewaltigen Aufwand bedeuten. Wegen $\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})$ und $\sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it})$ kann man das ursprünglich reelle Integral aber auf eines über den Einheitskreis umschreiben. Setzt man nun $z = e^{it}$, so ist $dz = ie^{it}dt = iz dt$ und man erhält

$$I = \oint_{|z|=1} \underbrace{\frac{1}{iz} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)}_{=: f(z)} dz$$

Wenn nun kein Pol, also keine Nullstelle des Nenners auf dem Einheitskreis selbst liegt, wird der Residuensatz anwendbar und man erhält für das Integral

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt = 2\pi i \sum_{|z_j|<1} \text{Res}(f(z), z_j), \quad (4.7)$$

wobei $f(z) := \frac{1}{iz} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)$ definiert wurde.

Beispiel: Wir berechnen das Integral $I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{(5+4\cos t)^2} dt$. Zunächst erhalten wir

$$f(z) = \frac{1}{iz} \frac{1}{\left(5 + 4\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right)^2} = \frac{z}{i} \frac{1}{(2z^2 + 5z + 2)^2} = \frac{z}{4i} \frac{1}{\left(z + \frac{1}{2}\right)^2 (z + 2)^2}$$

Diese Funktion hat bei $z = -\frac{1}{2}$ und $z = -2$ jeweils Pole zweiter Ordnung, nur $z = -\frac{1}{2}$ liegt dabei innerhalb des Einheitskreises. Für das Residuum an diesem Punkt ergibt sich:

$$\begin{aligned} \text{Res}\left(f; -\frac{1}{2}\right) &= \lim_{z \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{d}{dz} \left\{ \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 f(z) \right\} = \lim_{z \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{d}{dz} \left\{ \frac{z}{4i(z+2)^2} \right\} \\ &= \lim_{z \rightarrow -\frac{1}{2}} \left\{ \frac{1}{4i(z+2)^2} - \frac{2z}{4i(z+2)^3} \right\} = \frac{1}{9i} + \frac{2}{27i} = \frac{5}{27i} \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir also

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(5 + 4 \cos t)^2} dt = 2\pi i \cdot \frac{5}{27i} = \frac{10\pi}{27}.$$

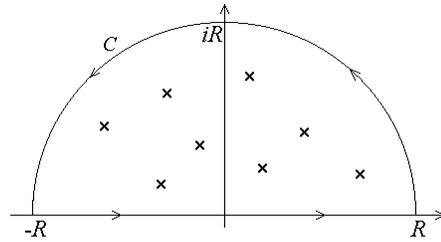
Der nächste Typ von Integral, den wir behandeln wollen, ist von der Form

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(t)}{Q(t)} dt,$$

wobei P und Q beide Polynome sind und $\text{Grad } Q \geq 2 + \text{Grad } P$ gelten soll, außerdem darf Q keine reellen Nullstellen besitzen.

Nun betrachten wir den rechts dargestellten Integrationsweg. Der Radius R sei dabei so groß, dass alle Pole, die sich in der oberen Halbebene befinden, innerhalb des Halbkreises liegen. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \int_C \frac{P(z)}{Q(z)} dz &= \int_{-R}^R \frac{P(t)}{Q(t)} dt + \int_{\cap} \frac{P(z)}{Q(z)} dz \\ &= 2\pi i \sum_{\text{Im } z_j > 0} \text{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)}, z_j \right) \end{aligned}$$



Bisher haben wir noch nicht viel gewonnen, denn wir wissen ja nicht, welchen Wert das Integral \int_{\cap} über den Halbkreis hat. Setzen wir aber die Abschätzung für Kurvenintegrale an, so ergibt sich

$$\left| \int_{\cap} \frac{P(z)}{Q(z)} dz \right| \leq \max_{\cap} \left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right| \cdot L(\cap).$$

Für große R fällt $\left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right|$ unter den obigen Voraussetzungen zumindest so schnell wie $\frac{\alpha}{|z|^2}$ mit $\alpha = \text{const}$ ab; die Länge des Halbkreises ist $L(\cap) = \pi R$. Wir erhalten also

$$\left| \int_{\cap} \frac{P(z)}{Q(z)} dz \right| \leq \frac{\alpha}{R^2} \pi R = \frac{\alpha\pi}{R},$$

und dieser Ausdruck geht gegen Null, wenn R gegen Unendlich geht. Für $R \rightarrow \infty$ erhalten wir also

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(t)}{Q(t)} dt = 2\pi i \sum_{\text{Im } z_j > 0} \text{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)}, z_j \right). \quad (4.8)$$

Beispiel: Wir berechnen

$$I = \int_0^{\infty} \frac{t^6}{1+t^8} dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^6}{1+t^8} dt.$$

Die Nullstellen des Nenners befinden sich bei $z_k = e^{i\frac{\pi+2\pi k}{8}}$, davon liegen $z_0 = e^{i\frac{\pi}{8}}$, $z_1 = e^{i\frac{3\pi}{8}}$, $z_2 = e^{i\frac{5\pi}{8}}$ und $z_3 = e^{i\frac{7\pi}{8}}$ in der oberen Halbebene. Die Residuen haben den Wert

$$\text{Res} \left(\frac{z^6}{1+z^8}; z_j \right) = \frac{z_j^6}{8z_j^7} = \frac{1}{8z_j}.$$

Damit erhält man (unter Berücksichtigung der Symmetrieeigenschaften $\cos \varphi = -\cos(\pi - \varphi)$ und $\sin \varphi = \sin(\pi - \varphi)$):

$$\begin{aligned} I &= \frac{2\pi i}{2 \cdot 8} \sum_{j=0}^3 \frac{1}{z_j} = \frac{i\pi}{8} \left\{ e^{-i\frac{\pi}{8}} + e^{-i\frac{3\pi}{8}} + e^{-i\frac{5\pi}{8}} + e^{-i\frac{7\pi}{8}} \right\} = \\ &= \frac{i\pi}{8} \left\{ \cos \frac{\pi}{8} - i \sin \frac{\pi}{8} + \cos \frac{3\pi}{8} - i \sin \frac{3\pi}{8} + \cos \frac{5\pi}{8} - i \sin \frac{5\pi}{8} + \cos \frac{7\pi}{8} - i \sin \frac{7\pi}{8} \right\} = \\ &= \frac{i\pi}{8} \left\{ -2i \sin \frac{\pi}{8} - 2i \sin \frac{3\pi}{8} \right\} = \frac{\pi}{4} \left\{ \sin \frac{\pi}{8} + \sin \frac{3\pi}{8} \right\} \end{aligned}$$

Ganz ähnlich lassen sich auch Integrale vom Typ

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(t)}{Q(t)} e^{i\alpha t} dt,$$

behandeln. Dabei sollen P und Q Polynome mit $\text{Grad } Q \geq 1 + \text{Grad } P$ sein, und Q wieder keine reellen Nullstellen besitzen, α sei eine beliebige positive (reelle) Konstante. Mit einer ähnlichen Abschätzung wie oben kann man wieder zeigen, dass das Integral über den Halbkreis verschwindet, und es bleibt

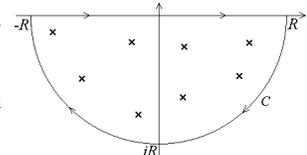
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(t)}{Q(t)} e^{i\alpha t} dt = 2\pi i \sum_{\text{Im } z_j > 0} \text{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z}, z_j \right). \quad (4.9)$$

Sind P und Q für reelle Argumente beide reellwertig, so zeigt sich durch Betrachtung von Real- und Imaginärteil weiters:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(t)}{Q(t)} \cos(\alpha t) dt &= \text{Re} \left\{ 2\pi i \sum_{\text{Im } z_j > 0} \text{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z}, z_j \right) \right\} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(t)}{Q(t)} \sin(\alpha t) dt &= \text{Im} \left\{ 2\pi i \sum_{\text{Im } z_j > 0} \text{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z}, z_j \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Diese Formeln gelten auch dann, wenn man statt $\frac{P(t)}{Q(t)}$ eine beliebige Funktion $F(t)$ betrachtet, für die $\lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{|z|=R} |F(z)| = 0$ ist. Verantwortlich dafür, dass die Voraussetzungen gegenüber dem vorherigen Typ $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(t)}{Q(t)} dt$ so abgeschwächt werden können, ist dass der Betrag von $e^{i\alpha z} = e^{i\alpha(x+iy)} = e^{i\alpha x} e^{-\alpha y}$ gleich $e^{-\alpha y}$ ist. Es ergibt sich also ein zusätzlicher exponentieller Abfall für große Imaginärteile, und deshalb verschwindet das Integral über den Halbkreis auch unter viel moderateren Bedingungen. Ganz salopp: Die e -Funktion macht das Integral konvergenter.

Auch eine weitere Voraussetzung kann man fallenlassen: Dazu gehen wir von $\alpha > 0$ auf $-\alpha < 0$ über und betrachten dafür einen Integrationsweg, der nicht in der oberen, sondern in der unteren Halbebene geschlossen wird. So erhält man die zu oben weitgehend analoge Formel:



$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(t)}{Q(t)} e^{-i\alpha t} dt = -2\pi i \sum_{\text{Im } z_j < 0} \text{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)} e^{-i\alpha z}, z_j \right)$$

Das zusätzliche Minus stammt daher, dass jetzt der gesamte Weg in mathematisch negativer Richtung durchlaufen wird, was sich natürlich auf die Windungszahlen $\text{Ind}_C(z_j)$ im Residuensatz auswirkt.

Beispiel: Wir ermitteln $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2+t^2} e^{i\alpha t} dt$ mit $k, \alpha \in \mathbb{R}^+$. Die rationale Funktion $\frac{1}{k^2+z^2}$ hat Pole erster Ordnung an $z = \pm ik$, davon interessiert uns hier ($\alpha > 0$) nur der in der oberen Halbebene, also $z = +ik$. Für das Residuum ergibt sich

$$\text{Res} \left(\frac{e^{i\alpha z}}{k^2+z^2}; +ik \right) = \lim_{z \rightarrow ik} \left\{ (z-ik) \frac{e^{i\alpha z}}{(z-ik)(z+ik)} \right\} = \frac{e^{-\alpha k}}{2ik}$$

und für das Integral damit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2+t^2} e^{i\alpha t} dt = 2\pi i \frac{e^{-\alpha k}}{2ik} = \frac{\pi}{k} e^{-\alpha k}.$$

Da $\frac{1}{k^2+t^2}$ für reelle t ebenfalls immer reell ist, haben wir damit automatisch auch (Betrachtung von Real- und Imaginärteil)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \alpha t}{k^2+t^2} dt = \frac{\pi}{k} e^{-\alpha k} \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha t}{k^2+t^2} dt = 0$$

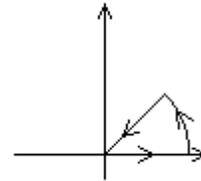
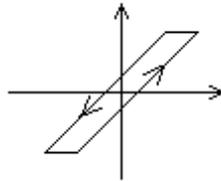
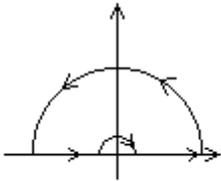
bestimmt. Dass das zweite Integral verschwindet, folgt nebenbei auch bereits aus den Symmetrieeigenschaften des Integranden.

Daneben gibt es noch viele weitere reelle Integrale, die sich durch Anwendung des Residuensatzes auf geschickt gewählte Funktionen und Integrationswege ergeben. Einige Beispiele dafür:

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$$

$$f(z) = \frac{e^{i\pi z^2}}{\sin \pi z}$$

$$f(z) = e^{iz^2}$$



$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

$$\int_0^{\infty} \cos t^2 dt = \int_0^{\infty} \sin t^2 dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Für alle diese Integrale gibt es eine gute Kontrollmöglichkeit, um herauszufinden, ob man wenigstens richtig gerechnet haben *könnte*. Wenn der Integrand auf dem ganzen Integrationsintervall reell ist, muss das Ergebnis auch rein reell sein, ganz egal wie viele funktionentheoretische Tricks und Hilfsmittel man auch verwendet haben mag. Jedes i im Endergebnis ist ein deutlicher Hinweis darauf, dass irgendwo etwas schiefgegangen ist.

Nur nebenbei erwähnt sei am Ende noch, dass sich auch bestimmte Reihen mit Hilfe des Residuensatzes berechnen lassen. Paradebeispiel dafür ist die Partialbruchzerlegung des Cotangens:

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}$$

4.6 Übungsaufgaben

1. Man bestimme die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

$$\begin{array}{lll}
 a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} z^n & b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 27^n} z^{3n} & c) \sum_{n=0}^{\infty} (i^{2n} - 1)(z - i)^n \\
 d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n - 1} z^n & e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{n(n+1)(n+2)} & f) \sum_{n=0}^{\infty} (1 + (-1)^n + \frac{1}{2^n}) z^n \\
 g) \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n} z^n & h) \sum_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{5}{n})^n e^{-5} z^n & i) \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{n})^{(n^2)} (z + 2)^{2n}
 \end{array}$$

Für die ersten drei Reihen erhalten wir

$$\begin{aligned}
 R_a &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)}{n} = 1 \\
 R_b &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{1 / \sqrt[n]{1 / (n 27^n)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\sqrt[n]{n} \sqrt[n]{27^n}} = \sqrt[3]{1 \cdot 27} = 3 \\
 R_c &= 1 / \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{i^{2n} + 1} = 1 / \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(-1)^n + 1} = 1 / \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} = 1
 \end{aligned}$$

2. Man entwickle die Funktion e^{-2z} in eine Taylorreihe um den Punkt $z = 0$ und ermittle den Konvergenzradius der Reihe.

Die Taylorreihe von e^u um $z = 0$ ist $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}$. Nun setzen wir $u = -2z$ und erhalten:

$$e^{-2z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2z)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!} z^n$$

Da die Taylorreihe von e^u für ganz \mathbb{C} konvergiert, ist das auch für jene von e^{-2z} der Fall ($z = -\frac{u}{2}$), das können wir symbolisch mittels $R = \infty$ schreiben.

3. Man ermittle ohne Rechnung den Konvergenzradius bei Entwicklung der jeweils angegebenen Funktion um den Punkt z_0 in eine Potenzreihe: a) $f(z) = \frac{z}{(z-i)(z+2)}$ um $z_0 = 0$, b) $f(z) = \text{Log}(z)$ um $z_0 = 2 + i$, c) $f(z) = 1/\sin(\frac{1}{z})$ um $z_0 = \frac{1}{\pi} + i$.

In a) hat die Funktion f Singularitäten in den Punkten $z = +i$ und $z = -2$. Die erste hat von der Entwicklungsmitte $z = 0$ den Abstand $R = 1$, und das ist gleichzeitig auch schon der Konvergenzradius der Potenzreihe.

4. Man ermittle die Laurentreihenentwicklung der Funktion $\sin(\frac{1}{z^2})$ um $z = 0$.

5. Man entwickle die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 2iz}$$

in Laurentreihen um die Punkte $z_1 = 0$ und $z_2 = 2i$ (jeweils zwei Bereiche).

6. Man berechne die Laurentreihenentwicklung der Funktion

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

a) für $|z| < 1$, b) für $1 < |z| < 2$ und c) für $|z| > 2$.

7. Man entwickle die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)}$$

in eine Laurentreihe

a) für $1 < |z| < 3$, b) für $|z| > 3$, c) für $0 < |z+1| < 2$ und d) für $|z| < 1$.

8. Wo haben die folgenden Funktionen Singularitäten und um welche Art handelt es sich jeweils?

a) $f(z) = \frac{1}{z^8 + z^2}$, b) $f(z) = \frac{1}{\cos \frac{1}{z}}$, c) $f(z) = \frac{\sin \frac{1}{z}}{z^2 + 1}$, d) $f(z) = \frac{1}{\sin z}$

9. Man zerlege die Funktion

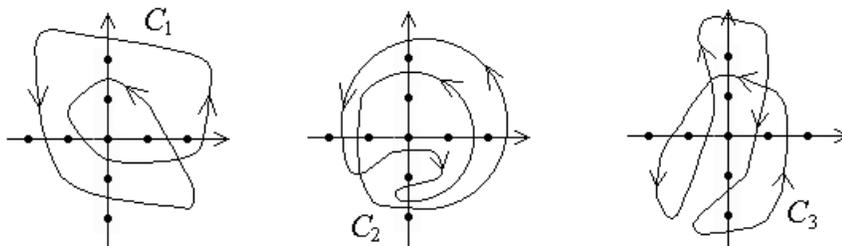
$$f(z) = \frac{4z^2 - 2z + 8}{z^3 - z^2 + 4z - 4}$$

in Partialbrüche und ermittle die Residuen an den Polstellen. (Hinweis: Eine Nullstelle des Nenners liegt bei $z = +1$)

10. Man ermittle die Residuen der folgenden Funktionen an allen Singularitäten:

a) $f(z) = \frac{z^2 - i}{z^2 + 1}$, b) $f(z) = \frac{e^{\pi z}}{z^2 + 1}$, c) $f(z) = \frac{1}{z^4 + 2z^2 - 3}$

11. Man berechne mit Hilfe des Residuensatzes die Integrale über $f(z) = \frac{e^{\pi z}}{z^2 - (1+2i)z + 2i}$ und $g(z) = \frac{z^2}{z^2 + (1+i)z + i}$ entlang der folgenden Kurven C_1 bis C_3 .



12. Man berechne mit Hilfe des Residuensatzes die Integrale über $f(z) = \frac{\sin \pi z}{z(z-i)(z+2i)}$ und $g(z) = \frac{z + \cos \pi z}{z(z-2)(z-2i)}$ entlang der Kurven C_1 bis C_3 aus dem vorangegangenen Beispiel.

13. Mittels Residuensatz berechne man die folgenden reellen Integrale:

a) $\int_0^\pi \sin^2 t \, dt$, b) $\int_0^{2\pi} \sin t \cos t \, dt$, c) $\int_0^\pi \frac{\cos 3t}{5 - 4 \cos t} \, dt$, d) $\int_0^\pi \frac{\sin 3t}{5 - 3 \cos t} \, dt$

a) Aus Symmetriegründen gilt

$$\int_0^\pi \sin^2 t \, dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin^2 t \, dt.$$

Nun definieren wir

$$f(z) := \frac{1}{iz} \left(\frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right) \right)^2 = -\frac{1}{4iz} \left(z^2 - 2 + \frac{1}{z^2} \right) = -\frac{1}{4i} \left(z - \frac{2}{z} + \frac{1}{z^3} \right).$$

Aus dieser Darstellung lässt sich unmittelbar

$$\text{Res}(f, 0) = \left(-\frac{1}{4i} \right) \cdot (-2) = \frac{1}{2i}$$

ablesen, und wir erhalten

$$\int_0^\pi \sin^2 t \, dt = \frac{1}{2} \left\{ 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} \right\} = \frac{\pi}{2}.$$

Dieses Ergebnis folgt auch ohne komplexe Hilfsmittel fast direkt aus einer graphischen Betrachtung und der Identität $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$.

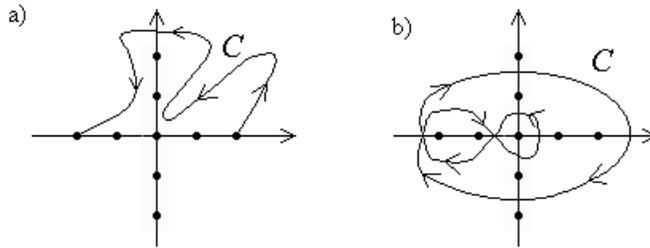
14. Mittels Residuensatz berechne man die folgenden reellen Integrale:

a) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^4 + 1} dt$, b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{t^6 + 1} dt$, c) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^4 + t^2 + 1} dt$

15. Mittels Residuensatz berechne man die folgenden reellen Integrale:

a) $\int_0^\infty \frac{\cos t}{t^4 + 16} dt$, b) $\int_{-\infty}^\infty \frac{t \sin t}{t^2 + 4} dt$, c) $\int_0^\infty \frac{t^2 \cos t}{t^4 + 81} dt$, d) $\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{3it}}{t^2 + i\pi t + 2\pi^2} dt$

16. Man berechne das Integral $\int_{C_k} \frac{\sinh z}{z^2 + \frac{\pi^2}{4}} dz$ entlang der unten in a) dargestellten Kurve mit Anfang $z_A = 2$ und Ende $z_E = -2$.



17. Man berechne das Integral $\oint_C \frac{e^{1/z^2}}{\text{Log } z} dz$ entlang der oben unter b) dargestellten Kurve.

18. Mit Hilfe des Residuensatzes zeige man die Fourierdarstellung der Stufenfunktion:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{1 + i\varepsilon} d\omega = \Theta(t) := \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t > 0 \end{cases}$$

19. Mit Hilfe der Potenzreihendarstellung zeige man, dass die Nullstellen holomorpher Funktion isoliert sind; daraus leite man den Identitätssatz für holomorphe Funktionen (siehe Kapitel über Komplexe Differenzierbarkeit) ab.

Kapitel 5

Weitere Sätze und Begriffe

Mit dem Residuensatz haben wir in gewisser Hinsicht den Gipfel dessen erreicht, was wir behandeln wollen. Was nun noch folgt, ist ein buntes Mosaik von Vertiefungen für diejenigen, die mehr Interesse an der Thematik haben.

Zunächst werden einige Sätze vorgestellt, die dem Residuensatz nahestehen und die es erlauben, Aussagen über das Nullstellenverhalten mancher Funktionen zu machen oder sogar auf den ersten Blick recht unangenehm wirkende Integrale zu ermitteln.

Im nächsten Abschnitt beschäftigen wir uns näher mit dem Verhalten von Funktionen im Unendlichen; dabei werden wir als Hilfsmittel die Riemannsche Zahlenkugel kennenlernen, die sich als im Prinzip gleichwertig zur komplexen Ebene herausstellen wird.

Das Konzept der analytischen Fortsetzung wird es uns erlauben, das Definitionsgebiet mancher holomorpher Funktionen zu erweitern, dabei werden wir aber auch auf einige Probleme stoßen, die sich erst durch die Einführung der Riemannschen Flächen lösen lassen. Durch diese werden auch bisher mehrdeutige Funktionen wie $\log z$ oder $\sqrt[n]{z}$ wieder so eindeutig, wie man es sich von einer Funktion nur wünschen kann.

Danach wenden wir uns konformen Abbildungen zu und studieren ihre geometrischen Eigenschaften. Das wird uns im folgenden Abschnitt sehr zugute kommen, wo sich konforme Abbildungen zusammen mit der Poissonschen Integralformel als Schlüssel zu Problemen aus der Potentialtheorie erweisen werden. Abgerundet wird dieses Kapitel schließlich durch einen Ausblick, was es auf dem weiten Feld der Funktionentheorie noch so alles zu entdecken gibt, das Spektrum reicht von elliptischen Funktionen bis zu Hilfsmitteln für die Zahlentheorie.

5.1 Der Satz von Rouché

Aus dem Residuensatz folgen mehr oder weniger direkt weitere interessante und nützliche Sätze, von denen wir hier einige vorstellen wollen: Zunächst wollen wir uns dabei mit dem Satz von Rouché beschäftigen:

Wenn f und g holomorph innerhalb und auf einer einfach geschlossenen Kurve C sind und auf ganz C gilt, dass $|g(z)| < |f(z)|$ ist, so haben $f + g$ und f innerhalb von C die gleiche Anzahl von Nullstellen. („Kleine Störungen ändern das prinzipielle Nullstellenverhalten nicht.“)

Dabei müssen Nullstellen entsprechend ihrer Vielfachheit gezählt werden, eine Nullstelle dritter Ordnung etwa zählt für den Satz von Rouché wie drei einfache Nullstellen.

Mit Hilfe dieses Satzes können die Nullstellen vieler Funktionen f (insbesondere von Polynomen höheren Grades) untersucht werden, ohne dass die Gleichung $f(z) = 0$ gelöst werden müßte (was analytisch ja meist gar nicht möglich ist.)

Beispiel: Für das Polynom $P(z) = z^{10} + 6z^7 + z^5 + z + 2$ zeigen wir zuerst, dass alle Nullstellen innerhalb von $|z| = 2$ liegen, und dann, dass sich sieben innerhalb von $|z| = 1$ befinden.

Wir wählen nun $f(z) = z^{10}$ und $g(z) = 6z^7 + z^5 + z + 2$. Dann gilt für $|z| = 2$ auf jeden Fall die Abschätzung:

$$|g(z)| = |6z^7 + z^5 + z + 2| \leq 6|z^7| + |z^5| + |z| + 2 < |z^{10}| = |f(z)|$$

Der Satz von Rouché wird also anwendbar und sagt uns, dass $f(z)$ und $P(z) = f(z) + g(z)$ innerhalb von $|z| = 2$ die selbe Anzahl von Nullstellen haben. $f(z) = z^{10}$ hat in $z = 0$ eine zehnfache Nullstelle, also muss auch P innerhalb dieses Kreises zehn Nullstellen haben.

Für den zweiten Teil der Aufgabe wählen wir $f(z) = z^{10} + 6z^7 = z^7(z^3 + 6)$ und $g(z) = z^5 + z + 2$. Die Dreiecksungleichung liefert uns wieder eine Abschätzung, diesmal für $|z| = 1$:

$$|g(z)| = |z^5 + z + 2| \leq |z^5| + |z| + 2 = 4 < 5 \leq |z^{10} + 6z^7| = |f(z)|$$

Nach dem Satz von Rouché haben $f(z)$ und $P(z) = f(z) + g(z)$ also innerhalb von $|z| = 1$ gleich viele Nullstellen. Die neue Funktion f hat eine siebenfache Nullstelle bei $z = 0$ und drei Nullstellen mit dem Betrag $\sqrt[3]{6} > 1$. Demnach hat auch P innerhalb des Einheitskreises sieben Nullstellen.

Eng verwandt mit dem Satz von Rouché ist auch die folgende Aussage über das Integral der logarithmischen Ableitung $(\log f(z))' = \frac{f'(z)}{f(z)}$:

G sei ein einfach zusammenhängendes Gebiet, f sei meromorph in G . C sei ein einfach geschlossener Weg mit $C^ \subset G$, wobei auf C^* keine Null- und Polstellen von f liegen. N_f sei die Anzahl der Null-, P_f die Anzahl der Polstellen von f in $\text{int}(C)$, wobei beide Arten so oft zu zählen sind, wie es ihrer Vielfachheit/Ordnung entspricht. Dann gilt:*

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N_f - P_f \quad (5.1)$$

(Satz vom Null- und Polstellen zählenden Integral)

Abgesehen vom rein akademischen Interesse kann dieser Satz in speziellen Fällen das Ermitteln von Integralen auf einfachem Weg erlauben:

Beispiel: Wir wollen das Integral $I = \int_{|z|=2} \frac{8z^7 + 10z^4 + 6}{z^8 + 2z^5 + 6z + 7} dz$ ermitteln. Mit Adleraugen erkennen wir, dass der Zähler im Integranden gerade die Ableitung des Nenners ist. Die Funktion $f(z) = z^8 + 2z^5 + 6z + 7$ hat keine Pole, und der Satz von Rouché sagt uns weiterhin, dass alle acht Nullstellen innerhalb des relevanten Kreises $|z| = 2$ liegen, denn es ist ja $|2z^5 + 6z + 7| \leq 2|z^5| + 6|z| + 7 = 77 < 256 = |z^8|$. Der Satz vom Null- und Polstellen zählenden Integral ergibt also mit $N_f = 8$ und $P_f = 0$:

$$I = \int_{|z|=2} \frac{(z^8 + 2z^5 + 6z + 7)'}{z^8 + 2z^5 + 6z + 7} dz = 2\pi i \cdot N_f = 16\pi i$$

Ganz allgemein gilt im Fall $P_f = 0$, also für eine in G holomorphe Funktion, wenn man die übrigen Voraussetzungen des vorherigen Satzes beibehält: Definiert man zu $C : z(t)$ eine weitere geschlossene Kurve $\Gamma(t) = f(z(t))$, so gilt das *Prinzip vom Argument*: $N_f = \text{Ind}_{\Gamma}(0)$. Die Windungszahl Ind_{Γ} des Ursprungs $z = 0$ zählt also die Nullstellen der Funktion im Inneren der Kurve C .

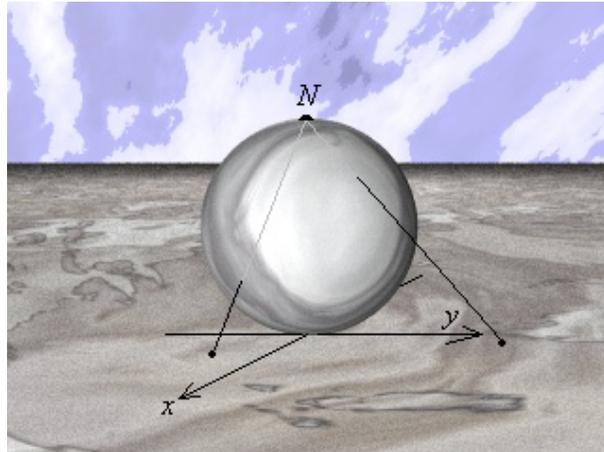
5.2 Verhalten im Unendlichen

Wir wollen nun darangehen, das Verhalten von Funktionen im Unendlichen unter die Lupe zu nehmen. Um aber das Unendliche überhaupt irgendwie einordnen zu können, benutzen wir ein auf den ersten Blick recht merkwürdiges Objekt, das aber im Prinzip äquivalent zur komplexen Ebene ist. Zunächst einmal betten wir die betrachtete $x - y$ -Ebene in einen dreidimensionalen Raum ein, dessen kartesische Koordinaten wir aus Liebe zum griechischen Alphabet (und um Verwechslungen zu vermeiden) mit (ξ, η, ζ) bezeichnen. Dabei soll aber weiter $x = \xi$ und $y = \eta$ sein.

In diesem Raum nehmen wir nun eine Kugel mit Mittelpunkt $(0, 0, \frac{1}{2})$ und dem Radius $r = \frac{1}{2}$, also

$$\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}.$$

Man spricht dabei von der Riemannschen Zahlenkugel. Verbinden wir nun einen beliebigen Punkt $z = x + iy$ mittels einer Geraden mit dem Nordpol $N = (0, 0, 1)$, so ergibt sich stets ein eindeutiger Schnittpunkt auf der Kugeloberfläche. Dass diese Abbildung ein wenig verzerrt (das Innere des Einheitskreises wird auf die Südhalbkugel abgebildet, alles außerhalb von $|z| = 1$ auf die Nordhalbkugel), soll uns nicht weiter stören.



Wichtig ist, dass jedem Punkt $z = x + iy$ eineindeutig ein Punkt auf der Kugel entspricht. Umgekehrt entspricht auch jeder Punkt auf der Kugel einem in der komplexen Ebene – mit Ausnahme des Nordpols. Diesem kann man nun den „unendlich fernen Punkt“ $z = \infty$ zuordnen. Da auf der Zahlenkugel der Nordpol keine besonders ausgezeichnete Rolle spielt, ordnet sich durch die oben erwähnte bijektive Abbildung $K_R \leftrightarrow \overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ auch der unendlich ferne Punkt auf natürliche Weise in unsere Betrachtungen ein.

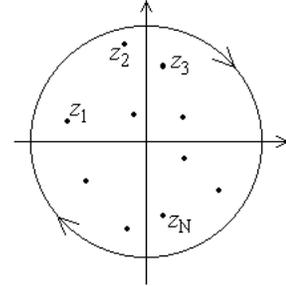
Wollen wir nun Funktionen in einer Umgebung von $z = \infty$ (also für betragsmäßig große z) untersuchen, so können wir das durch eine Transformation $z \rightarrow \frac{1}{w}$, $g(w) := f(\frac{1}{w})$ auf die Untersuchung von g in der Umgebung des Nullpunktes $w = 0$ zurückführen. Man sagt nun, f besitzt in $z = \infty$ eine bestimmte Eigenschaft (Nullstelle, Pol k -ter Ordnung, wesentliche Singularität), wenn das für g im Punkt $w = 0$ gilt.

Beispiel: Die Funktion $f_1(z) = \frac{1}{z^2}$ hat im Unendlichen eine Nullstelle zweiter Ordnung, weil $g_1(w) = w^2$ eine ebensolche in $w = 0$ hat. Analog hat $f_2(z) = z^3$ im Unendlichen einen Pol dritter Ordnung, denn $g_2(w) = \frac{1}{w^3}$ hat einen solchen im Nullpunkt. $f_3(z) = e^z$ hat wegen $g_3(w) = e^{1/w}$ im Unendlichen eine wesentliche Singularität.

Eine Ausnahme ist in dieser Hinsicht das Residuum im Unendlichen. So wird nämlich nicht einfach das Residuum der Entwicklung von g um $w = 0$ genannt, sondern zu diesem Begriff kommt man durch eine andere Überlegung: Wir betrachten dazu eine Funktion f , die holomorph in $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_N\}$ ist. Nun sei $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$ die Laurententwicklung um $z_0 = 0$, die außerhalb von $|z| = R := \max_j |z_j|$ gültig ist.

Die Kurve $C : z(t) = R_1 e^{-it}$, $t \in [0, 2\pi]$ mit $R_1 > R$ umläuft nun den unendlich fernen Punkt im mathematisch positiven Sinne („ $z = \infty$ liegt links von C “), und man erhält

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz = -a_{-1}.$$



Aus diesem Grund nennt man in dieser Entwicklung $-a_{-1}$ das Residuum im Unendlichen, man bezeichnet es mit $\text{Res}(f, \infty)$.

Da das Integral entlang der (nun positiv orientierten) Kurve $|z| = R_1$ gleich $2\pi i \sum_{j=1}^N \text{Res}(f, z_j)$, andererseits aber auch gleich $-2\pi i \text{Res}(f, \infty)$ ist, gilt stets

$$\sum_{j=1}^n \text{Res}(f, z_j) + \text{Res}(f, \infty) = 0. \quad (5.2)$$

Diesen Zusammenhang kann man entweder benutzen, um ein beliebiges Residuum zu berechnen oder aber um seine Rechnungen zu kontrollieren. Eine Anmerkung noch: Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ heißt Hauptteil der Entwicklung um $z = \infty$, in diesem besonderen Fall ist das Residuum also kein Koeffizient des Hauptteiles.

Beispiel: Die rationale Funktion

$$f(z) = \frac{3z - (2 + i)}{z^2 - (1 + i)z + i} = \frac{1}{z - 1} + \frac{2}{z - i}$$

hat die beiden Residuen $\text{Res}(f, +1) = 1$ und $\text{Res}(f, +i) = 2$. Als Laurententwicklung um $z = 0$ für $|z| > 1$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{z - 1} &= \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{n=-\infty}^{-1} z^n \\ \frac{2}{z - i} &= \frac{2}{z} \frac{1}{1 - \frac{i}{z}} = \frac{2}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2i^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{2}{i^{n+1}} z^n \end{aligned}$$

Die Funktion selbst hat also die Darstellung

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(1 + \frac{2}{i^{n+1}}\right) z^n \quad a_n = 1 + \frac{2}{i^{n+1}}, \quad a_{-1} = 3.$$

Das Residuum im Unendlichen ist also $\text{Res}(f, \infty) = -a_{-1} = -3$, und tatsächlich ist damit $\text{Res}(f, +1) + \text{Res}(f, +i) + \text{Res}(f, \infty) = 0$. Natürlich hätten wir das Residuum im Unendlichen auch direkt über diese Beziehung bestimmen können:

$$\text{Res}(f, \infty) = -\{\text{Res}(f, +1) + \text{Res}(f, +i)\} = -3$$

Umgekehrt wäre es auch möglich, entweder das Residuum in $z = +1$ oder in $z = +i$ über jenes im Unendlichen zu ermitteln, sofern das jeweils andere schon bekannt ist.

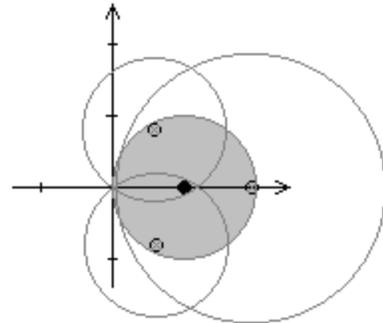
5.3 Analytische Fortsetzung und Riemannsche Flächen

In vielen Fällen ist man daran interessiert, eine (holomorphe) Funktion f , die auf einem (vielleicht nur kleinen) Teil von \mathbb{C} definiert ist, auch für einen größeren Bereich zu erklären. Nun seien G_1 und G_2 zwei Gebiete mit nichtleerem Durchschnitt $D := G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$, und es sei eine Funktion f auf G_1 und g auf G_2 holomorph. Wenn nun $f(z) = g(z)$ für alle $z \in D$ ist, so nennt man g die holomorphe Fortsetzung von f nach G_2 (und natürlich umgekehrt f die holomorphe Fortsetzung von g nach G_1). Wenn eine solche holomorphe Fortsetzung existiert, dann ist sie gemäß Identitätssatz eindeutig.

Beispiel: G_1 sei das Innere des Einheitskreises, $|z| < 1$, G_2 die komplexe Ebene ohne den Punkt $z = 1$. Die Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ konvergiert auf G_1 und stimmt dort mit der auf ganz G_2 definierten Funktion $g = \frac{1}{1-z}$ überein. Wegen $G_1 \cap G_2 = G_1 \neq \emptyset$ ist g die holomorphe Fortsetzung von f nach $G_2 = \mathbb{C} \setminus \{1\}$. (Die Potenzreihe selbst konvergiert hingegen tatsächlich nur in G_1 .)

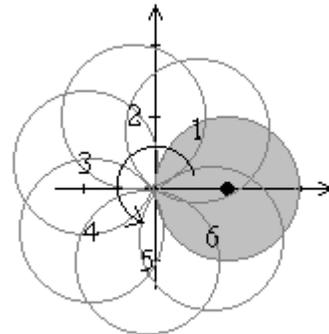
Ein mächtiges Hilfsmittel bei der holomorphen Fortsetzung ist natürlich die Potenzreihenentwicklung. Nehmen wir eine Funktion f , die im Nullpunkt eine Singularität besitze und für die wir die Potenzreihenentwicklung etwa um $z = 1$ kennen. Diese Reihe hat, wenn es keine anderen Singularitäten in der Nähe gibt, den Konvergenzradius $R = 1$.

Nun könnten wir aber einen Punkt nahe am Rande des Konvergenzgebietes wählen und um diesen wieder eine Potenzreihe ansetzen, die wiederum eine holomorphe Funktion darstellt. Da die beiden Funktionen im Durchschnitt der Konvergenzkreise übereinstimmen, haben wir eine holomorphe Fortsetzung gefunden, also das Definitionsgebiet unserer ursprünglich nur für $|z - 1| < 1$ bekannten Funktion erweitert.



Durch Fortsetzen dieses Spiels kann man (wenn einem nicht irgendwo Häufungspunkte von Singularitäten oder andere unangenehme Dinge im Weg sind) schließlich die gesamte komplexe Ebene (mit Ausnahme eben der isolierten Singularitäten) „abtasten“. Diese Vorgehensweise wird auch Kreiskettenverfahren genannt. Dabei stößt man aber manchmal auf ein Phänomen, das wir früher bereits ganz kurz gestreift haben.

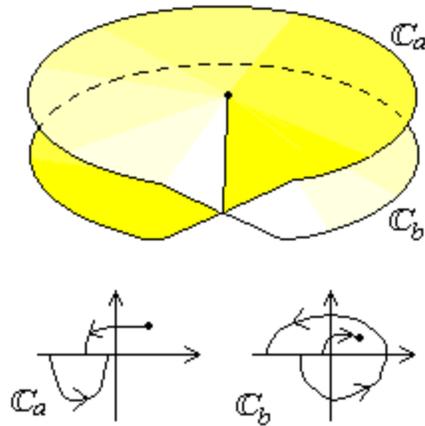
Kehrt man nämlich auf gewissen Wegen zum Ausgangspunkt zurück (in unserem Fall könnte das etwa durch Umrunden von $z = 0$ sein, so kann es passieren, dass man für diesen Punkt einen anderen Funktionswert erhält als zuvor. Auf den ersten Blick scheint das ein gravierender Widerspruch zum Prinzip der holomorphen Fortsetzung zu sein. Der Grund dafür ist natürlich, dass man es in so einem Fall mit einer mehrdeutigen Funktion (wie etwa $\log z$ oder $\sqrt[n]{z}$) zu tun hat und nun auf einem anderen Zweig gelandet ist. Um eine solche Funktion nun eindeutig zu machen (also wieder zu einer Funktion im engeren Sinne des Wortes) braucht man das Konzept der Riemannschen Blätter und Flächen.



Nehmen wir zur Illustration die Umkehrung von $w = z^2$. Den Betrag von w wollen wir hier mit ρ , das Argument mit ψ bezeichnen. Durch $f(z) = z^2$ wird jeweils die rechte und die linke Halbebene nach ganz \mathbb{C} abgebildet. Wir erhalten also zwei Umkehrfunktionen $g_a(w) = \sqrt{\rho}e^{i\psi/2}$ und $g_b(w) = -\sqrt{\rho}e^{i\psi/2}$. Jede dieser beiden Funktionen sei auf einer „eigenen“ komplexen Ebene \mathbb{C}_a bzw. \mathbb{C}_b definiert. Nun wählen wir (willkürlich!) die negative reelle Achse \mathbb{R}^- und „schneiden“ beide komplexen Ebenen an ihr entlang auf.

Wie sich leicht feststellen lässt, gehen die Werte von $g_a(w)$ oberhalb des Schnittes auf \mathbb{C}_a nahtlos (also stetig, ja sogar holomorph) in jene von $g_b(w)$ unterhalb des Schnittes in \mathbb{C}_b über. Entsprechendes gibt für $g_a(w)$ unterhalb und $g_b(w)$ oberhalb des Schnittes der jeweils entsprechenden Ebene.

Aus diesem Grund machen wir den entscheidenden Schritt: Wir identifizieren das untere „Ufer“ von \mathbb{C}_a mit dem oberen von \mathbb{C}_b und umgekehrt. Man kann sich vorstellen, dass man bei seiner Reise durch die komplexen Ebenen, wenn man etwa in \mathbb{C}_a beginnt, beim Überqueren von \mathbb{R}^- plötzlich nach \mathbb{C}_b gelangt und erst beim nochmaligen Überqueren von \mathbb{R}^- seine Reise wieder in \mathbb{C}_a fortsetzt. (Tiefsinnige Vergleiche mit Alice im Wunderland werden dem Leser überlassen.) Derartige Exemplare der komplexen Ebene nennt man *Riemannsche Blätter* und das aus mehreren (in unserem Fall zwei) solchen Blättern bestehende Objekt eine *Riemannsche Fläche* (wie rechts ansatzweise für \sqrt{w} dargestellt).



Auf unserer Riemannschen Fläche ist nun \sqrt{w} eine eindeutige und holomorphe Funktion ohne störende Unstetigkeiten auf \mathbb{R}^- . Dass wir die komplexe Ebene gerade entlang von \mathbb{R}^- aufgeschnitten und wieder verklebt haben, war im Prinzip eine (natürlich durch die Definition von $\text{Arg } w$ motivierte) Willkür.

Man könnte (hier zumindest bei entsprechender Wahl des Wertebereichs von Arg) auch jede andere von $w = 0$ bis $w = \infty$ laufende Kurve verwenden, die Schnitte sind nur Hilfsmittel zur Konstruktion der Riemannschen Fläche. Eindeutig sind hingegen die *Verzweigungspunkte* $w = 0$ und $w = \infty$. Ein solcher Verzweigungspunkt zeichnet sich dadurch aus, dass man das aktuelle Riemannsche Blatt verläßt, wenn man ihn einmal in einer genügend kleinen Umgebung umrundet.

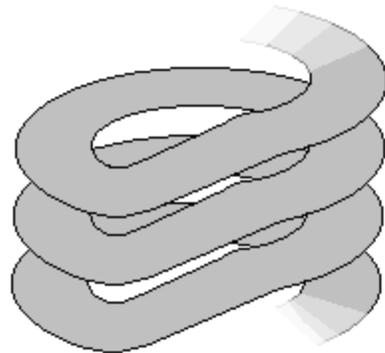
Beispiel: Auch für den Logarithmus $\log z$ kann man natürlich eine Riemannsche Fläche konstruieren:

Hier besteht diese aus abzählbar unendlich vielen Blättern (wie rechts dargestellt); $z = 0$ und $z = \infty$ sind Verzweigungspunkte unendlich hoher Ordnung (logarithmische Verzweigungspunkte).

Beispiel: Die Funktion

$$f(z) = \sqrt{(z - a)(z - b)}$$

mit $a \neq b$ und $a, b \neq 0$ hat an den Stellen $z = a$ und $z = b$ jeweils einen Verzweigungspunkt erster Ordnung.



5.4 Konforme Abbildungen und die Möbiustransformation

Stellen Sie sich zwei Flüsse vor, die sich senkrecht kreuzen. . .

Münchener Mathematikprofessor beim Versuch, abstrakte mathematische Begriffe wie die Winkeltreue durch alltägliche Erfahrungen aus der Geographie zu veranschaulichen.

Wir befassen uns nun näher mit den geometrischen Eigenschaften komplexer Funktionen. Zunächst betrachten wir dazu einen Punkt z_0 , durch den zwei Kurven $z_1(t)$ und $z_2(t)$ verlaufen. Von diesen Kurven fordern wir nur, dass sie in z_0 Tangenten besitzen, ansonsten ist ihre Wahl völlig frei.

Durch eine Funktion f wird nun eine Umgebung von z_0 von der z - in die w -Ebene abgebildet, und auch die beiden Kurven $z_1(t)$ und $z_2(t)$ gehen in zwei andere Kurven $w_1(t) = f(z_1(t))$ und $w_2(t) = f(z_2(t))$ über. Nun müssen $w_1(t)$ und $w_2(t)$ nicht notwendigerweise Kurven im engeren Sinn des Wortes sein; f könnte ja im Prinzip beliebig unstetig sein, die konstante Funktion $f(z) = c$ hingegen würde die beiden Kurven zusammen mit ganz \mathbb{C} in einen Punkt $w = c$ hinein abbilden.

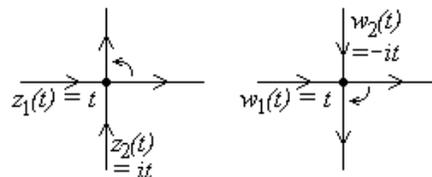
Nehmen wir aber an, dass die Bilder der z -Kurven auch in der w -Ebene zumindest in einer Umgebung von $w_0 = f(z_0)$ noch „vernünftige“ Kurven sind und darüberhinaus in w_0 auch noch Tangenten besitzen, so können wir definieren: Stimmen für alle $z_1(t)$, $z_2(t)$ die Winkel zwischen diesen Kurven einerseits und ihren Bildkurven unter f andererseits überein, so nennt man die Funktion *winkeltreu*. Stimmen die Winkel auch noch dem Drehsinn nach überein, so nennt man f zusätzlich *orientierungstreu*.

Beispiel: Wir geben eine Funktion an, die zwar winkel-, aber nicht orientierungstreu ist:

An der nebenstehenden Skizze sieht man klar, dass durch die Abbildung

$$f(z) = \bar{z}$$

zwar die rechten Winkel erhalten bleiben, ihr Drehsinn sich aber ändert.



Ist eine Funktion an jedem Punkt eines Gebietes G winkel- und orientierungstreu, so nennt man sie *lokal konform*. Ist sie zudem noch bijektiv, so heißt sie auf G *konform*. Wir haben schon gesehen, dass die aufeinander normalen Kurven $x = \text{const}$ und $y = \text{const}$ durch eine holomorphe Funktion in zwei Kurven $u(x, y) = \text{const}$ und $v(x, y) = \text{const}$ abgebildet werden, wobei diese beiden wieder normal aufeinander stehen. Ganz allgemein gilt nun, dass eine holomorphe Funktion überall dort, wo ihre Ableitung nicht verschwindet, eine zumindest lokal konforme Abbildung darstellt, und umgekehrt entspricht jede (lokal) konforme Abbildung einer solch holomorphen Funktion.

Beispiel: Die Exponentialfunktion ist auf ganz \mathbb{C} lokal konform, denn $f(z) = e^z$ ist überall holomorph und die Ableitung $f'(z) = e^z$ wird nirgendwo Null. Sie ist aber nicht konform, denn wegen $e^{z \pm 2\pi i} = e^z$ ist sie ja nicht bijektiv. Beschränkt man sich hingegen auf den Streifen $\{z \mid x \in \mathbb{R}, -\pi < y \leq \pi\}$, so wird e^z eindeutig und damit auch konform.

Beispiel: Die Funktion $f(z) = z^2$ hat die Ableitung $f'(z) = 2z$ und ist überall außer bei $z = 0$ lokal konform. Betrachtet man beispielsweise nur die rechte oder nur die linke Halbebene, so ist sie dort jeweils bijektiv und damit auch konform.

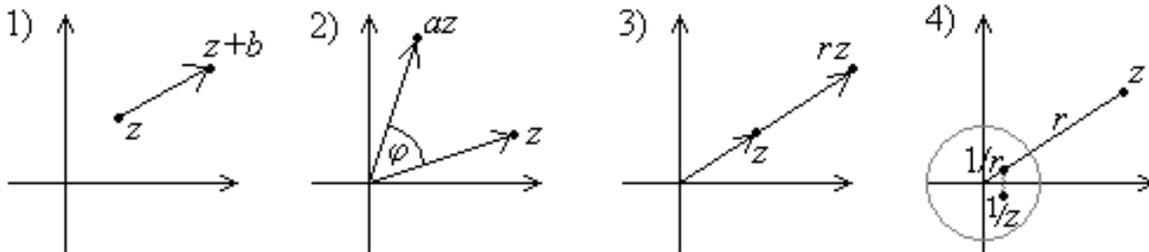
Konforme Abbildungen sind nützliche Werkzeuge in den verschiedensten Bereichen, ein Beispiel dafür werden wir schon im nächsten Abschnitt kennenlernen. Vorher aber soll eine ganz spezielle Klasse von konformen Abbildungen vorgestellt werden, die ganz besonders angenehme Eigenschaften haben, nämlich die *Möbiustransformationen* (gebrochen lineare Abbildungen):

$$\ell(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (5.3)$$

wobei a, b, c und d komplexe Zahlen mit der Eigenschaft $ad - bc \neq 0$ sind. Außerdem setzt man für $c \neq 0$ fest, dass $\ell(-\frac{d}{c}) = \infty$ und $\ell(\infty) = \frac{a}{c}$ sein soll, für $c = 0$ sei $\ell(\infty) = \infty$. Damit ist eine bijektive Abbildung $\overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ erklärt.

Durch Untersuchung der Ableitung zeigt sich außerdem, dass $\ell(z)$ für $c = 0$ konform auf ganz \mathbb{C} und für $c \neq 0$ konform auf $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ ist. Tatsächlich handelt es sich bei den Möbiustransformationen um außergewöhnlich nützliche Abbildungen. Bevor wir sie aber in voller Allgemeinheit untersuchen wollen, beschäftigen wir uns zuerst näher mit einigen speziellen Transformationen; das wird uns auch bei der geometrischen Interpretation dessen helfen, womit wir jetzt schon lange rechnen.

1. $\ell(z) = z + b$ stellt eine Translation (Verschiebung) um einen Vektor $b \in KC$ dar.
2. $\ell(z) = az$ mit $|a| = 1$ ist eine Drehung um den Winkel $\varphi = \text{Arg } a$.
3. $\ell(z) = rz$ mit $r \in \mathbb{R}^+$ bedeutet eine Streckung um den Faktor r (eine Stauchung für $r < 1$).
4. $\ell(z) = \frac{1}{z}$ heißt Inversion oder Stürzung. Der Betrag geht von r auf $\frac{1}{r}$ über und zusätzlich wird an der reellen Achse gespiegelt.



Jede beliebige Möbiustransformation läßt sich als Hintereinanderschaltung dieser vier Transformationen darstellen. Die Multiplikation mit einer beliebigen komplexen Zahl a ist natürlich ebenfalls eine spezielle Möbiustransformation ($b = c = 0, d = 1$). Dabei handelt es sich um eine Drehung plus einer Streckung, also gilt: *Die Multiplikation mit einer Zahl $a \in \mathbb{C}$ entspricht geometrisch einer Drehstreckung.*

Des weiteren zeigt sich, dass Kreise und Geraden von einer Möbius-Transformation $\ell(z)$ wieder in Kreise bzw. Geraden übergeführt werden. Bezeichnet man auch Geraden als Kreise (mit dem Radius $R = \infty$), so läßt sich noch prägnanter formulieren: *Möbius-Transformationen führen Kreise wieder in Kreise über* („Kreisverwandtschaft“ der Möbius-Transformation).

Wie für allgemeine Abbildungen nennt man auch für Möbius-Transformationen Punkte ζ mit $\ell(\zeta) = \zeta$ *Fixpunkte* der Abbildung. Klarerweise ist für die identische Abbildung $f(z) = z$ jeder

Punkt ein Fixpunkt. Jede andere Möbiustransformation aber hat höchstens zwei Fixpunkte. Daraus folgt unmittelbar:

Gegeben seien drei jeweils voneinander verschiedene Punkte z_1, z_2 und z_3 sowie w_1, w_2 und w_3 . Dann gibt es genau eine Möbius-Transformation $w = \ell(z)$ mit $w_j = \ell(z_j)$ für $j = 1, 2, 3$. Diese Transformation ist implizit durch

$$\frac{w - w_1}{w - w_3} \cdot \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}$$

gegeben. (Ist einer der Punkte jener im Unendlichen, so ist der Bruch, in dem dieser unendlich ferne Punkt in Zähler und Nenner vorkommt, naheliegenderweise durch 1 zu ersetzen.)

Beispiel: Wir suchen jene Möbius-Transformation, die die Punkte $z_1 = 2, z_2 = i$ und $z_3 = -2$ auf $w_1 = 1, w_2 = i$ und $w_3 = -1$ abbildet. Als implizite Bestimmungsgleichung erhalten wir

$$\frac{w - 1}{w + 1} \cdot \frac{i + 1}{i - 1} = \frac{z - 2}{z + 2} \cdot \frac{i + 2}{i - 2}$$

Löst man diese Gleichung nach w auf, so erhält man für die gesuchte Transformation:

$$w = \frac{3z + 2i}{iz + 6}$$

Beispiel: $z = -1, z_2 = 0$ und $z_3 = 1$ sollen abgebildet werden auf $w_1 = -1, w_2 = -i$ und $w_3 = 1$. Die Bestimmungsgleichung lautet dafür

$$\frac{w + 1}{w - 1} \cdot \frac{-i - 1}{-i + 1} = \frac{z + 1}{z - 1} \cdot \frac{0 - 1}{0 + 1}$$

und daraus erhält man

$$w = \frac{z - i}{-iz + 1} = i \frac{z - i}{z + i}$$

Besonders interessant sind Möbius-Transformationen, die etwa zwischen Gebieten wie der oberen Halbebene und dem Inneren des Einheitskreises vermitteln. Die allgemeine Form der Abbildung von $\text{Im } z > 0$ auf $|w| < 1$ ist

$$w = \ell(z) = e^{i\varphi} \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}$$

mit $\varphi \in \mathbb{R}$ und $\text{Im } z_0 > 0$. Für die Abbildung von $\text{Im } z > 0$ auf $\text{Im } w > 0$ erhält man den allgemeinen Ausdruck

$$w = \ell(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $ad - bc > 0$. Für Abbildungen von $|z| < 1$ auf $|w| < 1$ schließlich erhält man

$$w = \ell(z) = e^{i\varphi} \frac{z - z_0}{z \bar{z}_0 - 1}$$

mit $\varphi \in \mathbb{R}$ und $|z_0| < 1$.

Da bei vielen Problemen die wesentlichen Eigenschaften durch konforme Abbildungen erhalten bleiben, kann man viele Aufgaben (etwa in Elektrostatik oder Fluidmechanik) vereinfachen, indem man die betrachteten Gebiete zunächst etwa auf die Einheitskreisscheibe transformiert, dort löst und schließlich die Lösung rücktransformiert. Der (relativ aufwendig zu beweisende) kleine Riemannsche Abbildungssatz sagt aus, dass es tatsächlich für jedes einfach zusammenhängende Gebiet $\neq \mathbb{C}$ eine konforme Abbildung dieses Gebietes auf die offene Einheitskreisscheibe $|z| < 1$ gibt.

5.5 Die Poissonsche Integralformel

Aus der Cauchyschen Integralformel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

erhält man über $\zeta = Re^{it}$ und $z = re^{i\varphi}$ mittels einiger Umformungen durch Betrachtung des Realteils der Gleichung die *Poissonsche Integralformel*:

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{it}) \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(t - \varphi)} dt$$

Dabei ist u als Realteil einer holomorphen Funktion natürlich harmonisch, die Werte von u im Inneren des Kreises $|\zeta| = R$ sind über die Formel durch die Werte am Rand bestimmt. Es gilt aber sogar:

Gibt man auf der Kreislinie $|\zeta| = R$ eine beliebige stetige reellwertige Funktion $g(\zeta)$ vor, so ist

$$u(re^{i\varphi}) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(Re^{it}) \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(t - \varphi)} dt & \text{für } r < R \\ g(Re^{i\varphi}) & \text{für } r = R \end{cases}$$

stetig auf $|z| = r \leq R$ und harmonisch auf $|z| = r < R$. Mit Hilfe der Poissonschen Integralformel kann also eine stetige Funktion angegeben werden, die im Inneren des Kreises Lösung der Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$ ist und am Rand bestimmte vorgegebene Werte $g(\zeta)$ annimmt.

Die Lösung des Randwertproblems einer partiellen Differentialgleichung wird also auf eine „simple“ Integration zurückgeführt. Sind, wie in diesem Fall, am Rand die Funktionswerte selbst vorgegeben, so spricht man von einem Dirichlet-Problem. Wären dagegen die Ableitung vorgegeben, hätte man es mit einem (meist unangenehmeren) Neumann-Problem zu tun.

Die Laplace-Gleichung selbst kann die verschiedensten Situationen beschreiben, vom elektrostatischen Potential in ladungsfreien Bereichen bis zur stationären Temperaturverteilung auf einer Platte. Gibt man also am Rand eines Bereiches ein Potential oder eine Temperaturverteilung vor, so bestimmt die Laplace-Gleichung die Verhältnisse im Inneren. Man hat es dabei wiederum mit einem Dirichlet-Problem zu tun – und zumindest für den Spezialfall Kreis um den Ursprung wird dieses ja durch die Poissonsche Integralformel gelöst.

Der Riemannsche Abbildungssatz aus dem vorangegangenen Abschnitt sagt nun, dass sich jedes einfach zusammenhängende Gebiet $\neq \mathbb{C}$ konform auf den Einheitskreis transformieren läßt; die Laplace-Gleichung bleibt aber unter konformen Abbildungen invariant. Hat man es also mit dem Dirichlet-Problem für ein beliebiges einfach zusammenhängendes Gebiet zu tun, so kann man dieses zuerst auf $|z| < 1$ transformieren, dort die Lösung mittels Poisson-Integral ermitteln und diese anschließend wieder zurücktransformieren.

Bei geeigneter Geometrie (Kreise und Geraden) bieten sich als konforme Abbildungen Möbius-Transformationen an. Ein Paradebeispiel dafür ist das Potential zwischen zwei nicht coaxialen Zylindern. Mittels Möbius-Transformation kann es über jenes zwischen zwei coaxialen Zylindern bestimmt werden.

Allgemein finden diese und andere Techniken in der Potentialtheorie viele Anwendungen. Dabei kann man zum (reellen) elektrostatischen Potential $\Phi(x, y)$ ein komplexes Potential $f(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y)$ definieren, wobei Ψ die zu Φ harmonisch konjugierte Funktion ist und die Richtung der Kraftlinien angibt. Für das holomorphe f werden nun alle Methoden der Funktionentheorie zugänglich.

5.6 Ausblicke

Natürlich gibt es in der Funktionentheorie noch viel mehr Themen als in diesem doch recht knappen Skriptum präsentiert werden konnten. Ein wesentliches Problem ist etwa die holomorphe Fortsetzung weiterer reeller Funktionen in die komplexe Ebene, als wichtiges Beispiel sei die Gammafunktion

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$$

genannt, die eng mit der Fakultät zusammenhängt. Diese an sich nur für \mathbb{R}^+ definierte Funktion läßt sich auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_0^-$ holomorph fortsetzen, in $\mathbb{Z}_0^- = \{0, -1, -2, -3, \dots\}$ hat sie Pole erster Ordnung.

Ein anderes bedeutendes Beispiel ist die *Riemannsche Zetafunktion*, die holomorphe Fortsetzung der für $x > 1$ konvergenten Reihe

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-x}$$

auf $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, die eine wichtige Rolle in der Zahlentheorie spielt. Eng mit ihr verknüpft ist eine der berühmtesten noch unbewiesenen Aussagen der gesamten Mathematik, nämlich die *Riemannsche Vermutung*: Diese besagt, dass die Zetafunktion für $\operatorname{Re} z > \frac{1}{2}$ keine nichttrivialen Nullstellen besitzt. Ist das tatsächlich der Fall (und auch noch unter der schwächeren Bedingung, dass $\zeta(z)$ keine Nullstellen für $\operatorname{Re} z > x_0$ mit $x_0 < 1$ hat), erhält man eine wesentlich verbesserte Abschätzung für die Primzahldichte.

Ein bedeutendes Gebiet ist weiters jenes der *elliptischen Funktionen*, einer Klasse von Funktionen, die sowohl reell als auch imaginär periodisch sind. Es zeigt sich, dass sie Umkehrfunktionen zu *elliptischen Integralen* wie etwa $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$ sind, dies war auch der historisch ältere Zugang zu den elliptischen Funktionen. Alle elliptischen Funktionen lassen sich konstruktiv aus der Weierstraßschen *P-Funktion* (zum Gitter $L = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$, $\omega_j \in \mathbb{C}$)

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in L, \omega \neq 0} \left\{ \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right\}$$

gewinnen. Verwandt mit der Theorie der elliptischen Funktionen, aber schwieriger ist jene der *elliptischen Modulformen*, bei diesen handelt es sich um auf der oberen Halbebene analytische Funktionen mit speziellen Transformationseigenschaften.

Schließlich spielt die Funktionentheorie auch in der Funktionalanalysis und der Theorie der Differentialgleichungen eine wesentliche Rolle.

5.7 Übungsaufgaben

1. Mit Hilfe des Satzes von Rouché beweise man, dass

- alle Nullstellen des Polynoms $P(z) = z^7 - 5z^3 + 12$ zwischen den Kreisen $|z| = 1$ und $|z| = 2$ liegen,
- im Kreisring $1 < |z| < 5$ genau eine Nullstelle von $P(z) = z^5 - 4z^4 + z - 1$ liegt,
- alle Nullstellen von $P(z) = z^7 + z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z$ innerhalb des Kreises $|z| = 2$ liegen.

a) Zuerst setzen wir $f(z) = 12$ und $g(z) = z^7 - 5z^3$. Für $|z| = 1$ ist

$$|g(z)| = |z^7 - 5z^3| \leq |z^7| + 5|z^3| = 6 < 12 = |f(z)|,$$

also haben f und $P = f + g$ innerhalb von $|z| = 1$ gleich viele Nullstellen, nämlich keine. Nun setzen wir $f(z) = z^7$ und $g(z) = -5z^3 + 12$. Nun können wir für $|z| = 2$ abschätzen:

$$|g(z)| = |-5z^3 + 12| \leq 5|z^3| + 12 = 52 < 128 = |f(z)|$$

Da f innerhalb von $|z| = 2$ sieben Nullstellen hat, müssen auch alle Nullstellen von $P = f + g$ innerhalb dieses Kreises liegen.

2. Man beweise mit Hilfe des Satzes von Rouché, dass jedes Polynom vom Grad $n \geq 1$ genau n Nullstellen hat.

3. Man berechne die Integrale

a) $\oint_{|z|=2} \frac{12z^5 + 16z^3 + 12z + 10}{z^6 + 2z^4 + 3z^2 + 5z + 3} dz$, b) $\oint_{|z|=3} \frac{4z^3 + 3z^2 + 6z + 3}{z^4 + z^3 + 3z^2 + 3z + 3} dz$,

c) $\oint_{|z|=2} \frac{iz^9 + 50i}{\pi z^{10} + 500\pi z + 23\pi} dz$

4. Man berechne für die Funktionen aus den Aufgaben 4 bis 10 des vorangegangenen Kapitels die Residuen im Unendlichen.

In Aufgabe 4 hat $\sin(\frac{1}{z^2})$ um $z = 0$ die Laurententwicklung $f(z) = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!} \frac{1}{z^6} \pm \dots$. Der Koeffizient a_{-1} dieser Entwicklung verschwindet, also ist auch $\text{Res}(f, \infty) = 0$.

5. Man zeige, dass die Matrizen

$$M = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix},$$

die eine Drehstreckung vermitteln, mit den üblichen Operationen (Matrixaddition und -multiplikation) äquivalent zu den komplexen Zahlen $z = a + ic$ sind.

6. Man zeige, dass Geraden und Kreise jene Punktmenge in \mathbb{C} sind, die einer Gleichung

$$Az\bar{z} + Bz + \bar{B}\bar{z} + C = 0$$

genügen, wobei $A, C \in \mathbb{R}$ und $B\bar{B} > AC$ ist.

7. Warum wird für Möbiustransformationen $\ell(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ die Bedingung $ac - bd \neq 0$ gefordert?

8. Man zeige, dass die Möbiustransformationen bezüglich Hintereinanderausführung eine Gruppe bilden. Ist diese Gruppe kommutativ?

9. Man berechne das Potential zwischen zwei unendlich ausgedehnten leitenden Platten, die eine bei $\text{Re } z = -1$ mit Potential Φ_1 , die andere bei $\text{Re } z = +1$ mit Potential Φ_2 . Zusätzlich ermittle man das komplexe Potential.

10. Man berechne das Potential zwischen zwei unendlich langen leitenden Zylindern, wobei der erste ($|z| = r_1$) auf dem Potential Φ_1 und der zweite ($|z| = r_2 > r_1$) auf Φ_2 liegt. Zusätzlich ermittle man das komplexe Potential.

Anhang A

Lösungen und Literatur

In diesem Anhang werden zumindest die Lösungen, oft sogar die vollständigen Rechnungen zu den übrigen Übungsaufgaben angegeben. Im eigenen Interesse sollte man hier erst nachschlagen, nachdem man sich selbst an der Aufgabe zumindest versucht hat. Außerdem finden sich hier eine kurze Literaturübersicht, die natürlich nicht den geringsten Anspruch auf Vollständigkeit erhebt, und ein Stichwortverzeichnis.

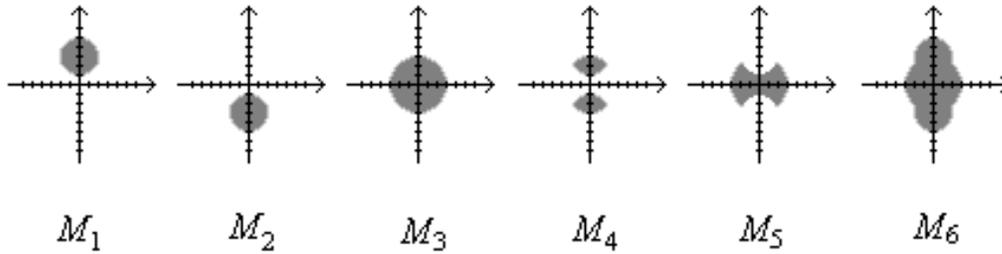
A.1 Lösungen (Komplexe Zahlen)

- b) $z_1 + z_2 = 5 - 3i$, $z_1 z_2 = 4 - 7i$, $z_1 - z_2 = -1 + i$, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{8+i}{13}$ und $z_1^2 - z_2^2 = -2 + 8i$
c) $z_1 + z_2 = 6$, $z_1 z_2 = 13$, $z_1 - z_2 = -4i$, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{5-12i}{13}$ und $z_1^2 - z_2^2 = 24i$
- b) $|z_1| = \sqrt{2}$, $\text{Arg } z_1 = -\frac{\pi}{4}$, $|z_2| = 1$, $\text{Arg } z_2 = \frac{\pi}{2}$, $|z_1 z_2| = \sqrt{2}$, $\text{Arg } (z_1 z_2) = \frac{\pi}{4}$, $|\frac{z_1}{z_2}| = \sqrt{2}$, $\text{Arg } \frac{z_1}{z_2} = -\frac{3\pi}{4}$;
c) $|z_1| = 2\sqrt{2}$, $\text{Arg } z_1 = \frac{\pi}{6}$, $|z_2| = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $\text{Arg } z_2 = -\frac{\pi}{6}$, $|z_1 z_2| = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $\text{Arg } (z_1 z_2) = 0$, $|\frac{z_1}{z_2}| = \sqrt{6}$, $\text{Arg } \frac{z_1}{z_2} = \frac{\pi}{3}$
- b) $|z_1| = \sqrt{2}$, $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$, $|z_2| = 2\sqrt{2}$, $\varphi_2 = -\frac{3\pi}{4}$; $z_1^{10} = 2^5 e^{i\frac{10\pi}{4}} = 32i$, $z_2^8 = 2^{12} e^{-6i\pi} = 4096$, $z_1^5 z_2^4 = 2^8 \sqrt{2} e^{-i\frac{3\pi}{4}} e^{i\pi} = 256 + 256i$; c) $|z_1| = 2\sqrt{2}$, $\varphi_1 = \frac{\pi}{3}$, $|z_2| = 2$, $\varphi_2 = \frac{2\pi}{3}$; $z_1^{10} = 2^{15} e^{-i\frac{2\pi}{3}} = -8192 - 8192\sqrt{3}i$, $z_2^8 = 2^8 e^{i\frac{16\pi}{3}} = -64 - 64\sqrt{3}i$, $z_1^5 z_2^4 = 2^{11} \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{3}} = 512\sqrt{2}(\sqrt{3} + i)$
- b) $|w_k| = 2$, $\text{Arg } z = 0$, $w_k = 2(\cos \frac{k\pi}{4} + i \sin \frac{k\pi}{4})$ mit $k = 0, \dots, 7$. Reell sind $w_0 = 2$ und $w_4 = -2$; c) $|w_k| = 3$, $\text{Arg } z = -\frac{\pi}{2}$, $w_0 = 3e^{-i\frac{\pi}{6}}$, $w_1 = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$, $w_2 = 3e^{-i\frac{5\pi}{6}}$, kein w_k ist reell
- b) Die Formel von Moivre für $n = 4$ lautet: $\cos(4\varphi) + i \sin(4\varphi) = \cos^4 \varphi + 4i \cos^3 \varphi \sin \varphi - 6 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi - 4i \cos \varphi \sin^3 \varphi + \sin^4 \varphi$ Hier müssen die Realteile auf beiden Seiten übereinstimmen, und mit $\sin^2 \varphi = 1 - \cos^2 \varphi$ erhält man die zu beweisende Aussage.
c) Für $n = 2$ ergibt die Formel von Moivre:

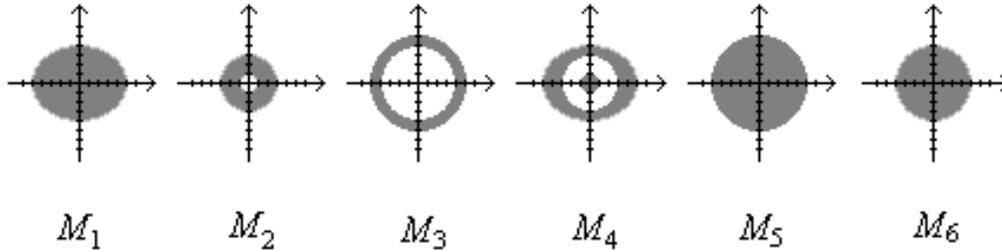
$$\cos(2\varphi) + i \sin(2\varphi) = (\cos \varphi + i \sin \varphi)^2 = \cos^2 \varphi + 2i \cos \varphi \sin \varphi - \sin^2 \varphi$$

Daraus folgt durch Vergleich von Real- und Imaginärteil sofort $\cos(2\varphi) = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi$ und $\sin(2\varphi) = 2 \cos \varphi \sin \varphi$.

- b) M_1 bis M_3 sind offene Kreisscheiben mit den Mittelpunkten $z_1 = 3i$, $z_2 = -3i$, $z_3 = 0$ und den Radien $r_1 = 2$, $r_2 = 2$ und $r_3 = 3$. Alle drei sind natürlich konvexe Gebiete. M_4 ist offen, aber nicht zusammenhängend, M_5 ist zusammenhängend, aber nicht offen, beide sind daher keine Gebiete. M_6 hingegen ist ein Sterngebiet, aber nicht konvex.



c) M_1 ist eine offene Ellipse mit Brennpunkten $z = -3$ und $z = 3$, also ein konvexes Gebiet. M_2 und M_3 sind Kreistränge, wobei M_2 offen ist, M_3 hingegen nicht. M_2 ist also ein zweifach zusammenhängendes Gebiet. M_4 ist weder offen noch zusammenhängend, M_5 ist nicht offen, beide sind also keine Gebiete. M_6 hingegen ist als offene Kreisscheibe ein konvexes Gebiet.



7. Man verifiziert die Körperaxiome durch Rückführung auf die bekannten Rechenregeln für die reellen Zahlen. Als Beispiel erhält man beim Kommutativgesetz der Addition:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) = (c + a, d + b) = (a, d) + (a, b)$$

Das Nullelement ist $(0, 0)$, das inverse Element bezüglich Addition von (a, b) ist $(-a, -b)$. Für das Einselement erhält man $(1, 0)$, für das inverse Element bezüglich Multiplikation $(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2})$.

8. Wiederum zeigt man durch Rückführung auf die Rechenregeln für reelle Zahlen, dass die Vektorraumaxiome erfüllt sind. \mathbb{C} ist ein Vektorraum sowohl über \mathbb{R} als auch über \mathbb{C} , allerdings können im Vektorraum über \mathbb{R} zwei komplexe Zahlen linear unabhängig sein, im Vektorraum über \mathbb{C} hingegen sind sie immer linear abhängig.

$$9. \overline{z_1 z_2} = \overline{(x + iy)(u + iv)} = \overline{xu + ixv + iyu - yv} = \overline{xu - yv + i(xv + yu)} = xu - yv - i(xv + yu) = (x - iy)(u - iv) = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \overline{z_1 + z_2} = \overline{x + iy + u + iv} = x - iy + u - iv = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \overline{\bar{z}} = \overline{x + iy} = x - iy = z, |z_1 z_2| = |r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2}| = |r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}| = r_1 r_2 = |z_1| \cdot |z_2|, \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

10. a) Wenn z_0 eine Nullstelle des Polynoms ist, dann gilt natürlich $a_0 + a_1 z_0 + \dots + a_n z_0^n = 0$. Wenn wir diese Gleichung komplex konjugieren und $\bar{z} + \bar{w} = \overline{z + w}$, $\overline{z \bar{w}} = \bar{z} w$ sowie $\overline{a_k} = a_k$ verwenden, erhalten wir $a_0 + a_1 \bar{z}_0 + \dots + a_n \bar{z}_0^n = 0$. Also ist auch \bar{z}_0 eine Nullstelle des Polynoms. Daraus folgt, dass die Nullstellen von Polynomen mit reellen Koeffizienten entweder reell sind oder sonst als komplex konjugierte Paare auftreten.

b) Wenn $z_1 = +i$ eine Nullstelle ist, dann gilt das Gleiche auch für $z_2 = \bar{z}_1 = -i$. Nun kann man eine Polynomdivision durch $(z + i)(z - i) = z^2 + 1$ durchführen und erhält:

$$(z^4 + z^3 - 5z^2 + z - 6)/(z^2 + 1) = z^2 + z - 6$$

Das verbleibende Polynom zweiten Grades hat die Nullstellen $z = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$, also $z_3 = 2$ und $z_4 = -3$.

11. Die Dezimaldarstellung einer reellen Zahl aus $(0, 1)$ hat die Form $0, a_1 a_2 a_3 a_4 \dots$. Nun definieren wir zwischen E_1 und E_2 die folgende bijektive Abbildung:

$$E_1 : x = 0, a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9 a_{10} \dots$$

↓ Bijektion

$$E_2 : z = 0, a_1 a_3 a_5 \dots + i \cdot 0, a_2 a_4 a_6 \dots$$

Einheitsquadrat und Einheitsintervall sind also von der gleichen (mengentheoretischen) Mächtigkeit.

A.2 Lösungen (Komplexe Differenzierbarkeit)

1. —

2. Allgemein erhält man $z^3 = (x + iy)^3 = x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3 = x^3 + 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$, $e^{(z^3)} = e^{x^3 - 3xy^2} e^{i(3x^2y - y^3)} = e^{x^3 - 3xy^2} (\cos(3x^2y - y^3) + i \sin(3x^2y - y^3))$. Speziell für $z_1 = \sqrt[3]{\pi} + i\sqrt[3]{\pi}$ ergibt sich $e^{(z_1^3)} = e^{-2\pi} (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = \frac{1}{e^{2\pi}}$

3. b) $|z_1| = 2$, $\text{Arg } z_1 = -\frac{\pi}{3}$, $\text{Log } z_1 = \ln 2 - i\frac{\pi}{3}$; $|z_2| = 2$, $\text{Arg } z_2 = -\frac{2\pi}{3}$, $\text{Log } z_2 = \ln 2 - i\frac{2\pi}{3}$; $|z_3| = 4$, $\text{Arg } z_3 = \pi$, $\text{Log } z_3 = 2 \ln 2 + i\pi \neq \ln 2 - i\pi = \text{Log } z_1 + \text{Log } z_2$.

c) $|z_1| = \sqrt{2}$, $\text{Arg } z_1 = -\frac{\pi}{4}$, $\text{Log } z_1 = \frac{1}{2} \ln 2 - i\frac{\pi}{4}$; $|z_2| = 3$, $\text{Arg } z_2 = \frac{\pi}{2}$, $\text{Log } z_2 = \ln 3 + i\frac{\pi}{2}$; $|z_3| = 3\sqrt{2}$, $\text{Arg } z_3 = \frac{\pi}{4}$, $\text{Log } z_3 = \ln 3 + \frac{1}{2} \ln 2 + i\pi = \text{Log } z_1 + \text{Log } z_2$.

4. b) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$. Ansatz $\Delta z = \Delta x \in \mathbb{R}$: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$; Ansatz $\Delta z = i\Delta y$: $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{i\Delta y}{i\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-i\Delta x}{i\Delta x} = -1$. Die beiden Richtungsgrenzwerte sind nicht gleich, der Grenzwert existiert also nicht.

c) $\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^2 - 1}{1 + \bar{z}} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(1 + \Delta z)^2 - 1}{1 + 1 + \overline{\Delta z}} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1 + 2\Delta z + (\Delta z)^2 - 1}{1 + 1 + \overline{\Delta z}} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta z(2 + \Delta z)}{2 + \overline{\Delta z}} = \frac{0 \cdot (2 + 0)}{2 + 0} = 0$, unabhängig von der Richtung, aus der Δz gegen Null geht.

5. b) $f(z) = z^2 + (1 + i)z - 1 = (x + iy)^2 + (1 + i)(x + iy) - 1 = x^2 - y^2 + x - y - 1 + i(2xy + x - y)$, also ist $u(x, y) = x^2 - y^2 + x - y - 1$ und $v(x, y) = 2xy + x - y$. Beide Funktionen sind $C^1(\mathbb{R}^2)$ und es gilt $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 1 = \frac{\partial v}{\partial y}$ sowie $\frac{\partial u}{\partial y} = -2y - 1 = -\frac{\partial v}{\partial x}$. Die Funktion ist also auf ganz \mathbb{C} holomorph.

c) $f(z) = e^{\sin z} = e^{\sin x \cosh y} e^{i \cos x \sinh y} = e^{\sin x \cosh y} \cos(\cos x \sinh y) + i e^{\sin x \cosh y} \sin(\cos x \sinh y)$, man erhält also $u(x, y) = e^{\sin x \cosh y} \cos(\cos x \sinh y) \in C^1$ und $v(x, y) = e^{\sin x \cosh y} \sin(\cos x \sinh y) \in C^1$. Mit intensivem Einsatz von Produkt- und Kettenregel erhält man $\frac{\partial u}{\partial x} = e^{\sin x \cosh y} \cos x \cosh y \cos(\cos x \sinh y) + e^{\sin x \cosh y} \sin(\cos x \sinh y) \sin x \sinh y = \frac{\partial v}{\partial y}$ und $\frac{\partial u}{\partial y} = e^{\sin x \cosh y} \sin x \sinh y \cos(\cos x \sinh y) - e^{\sin x \cosh y} \sin(\cos x \sinh y) \cos x \cosh y = -\frac{\partial v}{\partial x}$. Die Cauchy-Riemann-Gleichungen sind also erfüllt.

6. b) $f(z) = \frac{z^4}{|z|^3} = \frac{z^4}{z^3/\bar{z}^3/2} = \frac{z^5/2}{\bar{z}^3/2}$ und man erhält für die Wirtinger-Ableitungen: $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = -\frac{3}{2} \frac{z^{5/2}}{\bar{z}^{5/2}} \neq 0 \forall z \in M = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Also ist f nirgendwo auf M komplex differenzierbar.

c) $f(z) = e^{|z|^2 - \frac{1}{2}\bar{z}^2} = e^{z\bar{z} - \frac{1}{2}\bar{z}^2}$ und die Wirtinger-Ableitung ergibt $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = e^{z\bar{z} - \frac{1}{2}\bar{z}^2} \cdot (z - \bar{z})$. Der erste Faktor kann nie verschwinden, also ist $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ nur Null für $z = \bar{z}$, also für $z \in \mathbb{R}$. Die Funktion ist also nur auf der reellen Achse komplex differenzierbar, aber nirgends holomorph.

7. a) Wir untersuchen $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\text{Im}(z + \Delta z) - \text{Im } z}{\Delta z}$ zunächst für $\Delta z = \Delta x$: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{Im}(x + iy + \Delta x) - \text{Im}(x + iy)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y - y}{\Delta x} = 0$. Für $\Delta z = i\Delta y$ hingegen erhält man $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\text{Im}(x + iy + i\Delta y) - \text{Im}(x + iy)}{i\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{y + \Delta y - y}{i\Delta y} = -i$. Die beiden Grenzwerte stimmen nicht überein.

b) Die beiden Funktionen $u = \text{Re } f = y$ und $v = \text{Im } f = 0$ sind zwar $C^1(\mathbb{R}^2)$, aber es ist $\frac{\partial u}{\partial y} = 1 \neq 0 = -\frac{\partial v}{\partial x}$, also sind die Cauchy-Riemann-Gleichungen nicht erfüllt.

c) $\text{Im } z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$, also ist $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = -\frac{1}{2i} \neq 0$. Auf alle drei Arten zeigt sich (mit unterschiedlichem Aufwand), dass $f(z) = \text{Im } z$ nirgendwo komplex differenzierbar ist.

8. b) Für $u(x, y) = x^2 - y^2 - 2xy - 3x + 3y$ ergeben sich die Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 2y - 3$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -2y - 2x + 3$ und damit $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 - 2 = 0$. Also ist u harmonisch. Nun kann man definieren: $a(x) := \frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 2x - 3 - i(-2x + 3) = (2 + 2i)x - (3 + 3i)$, und daraus folgt mit dem Identitätssatz $f'(z) = (2 + 2i)z - (3 + 3i)$. Integration liefert $f(z) = (2 + 2i)\frac{z^2}{2} - (3 + 3i)z + C$, die Konstante setzen wir Null. Damit erhält man: $f(z) = (1 + i)z^2 - (3 + 3i)z = (1 + i)(x + iy)^2 - (3 + 3i)(x + iy) = x^2 - 2xy - y^2 - 3x + 3y + i(x^2 + 2xy - y^2 - 3x - 3y)$, also $v(x, y) = x^2 + 2xy - y^2 - 3x - 3y$.

c) $u(x, y) = x^3y - xy^3$, $\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2y - y^3$, $\frac{\partial u}{\partial y} = x^3 - 3xy^2$, $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6xy - 6xy = 0$, $a(x) := \frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = -ix^3$, daraus folgt mit dem Identitätssatz $f'(z) = -iz^3$. Integration liefert (mit $C = 0$): $f(z) = -i\frac{z^4}{4} = \frac{1}{4}(-ix^4 + 4x^3y + 6ix^2y^2 - 4xy^3 - iy^4)$, also ist $v(x, y) = \frac{1}{4}(-x^4 + 6x^2y^2 - y^4)$.

9. $u(x, y) = e^{3x} \cos(ay)$, $\frac{\partial u}{\partial x} = 3e^{3x} \cos(ay)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 9e^{3x} \cos(ay)$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -ae^{3x} \sin(ay)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -a^2 e^{3x} \cos(ay)$, also $\Delta u = (9 - a^2)e^{3x} \cos(ay)$, und damit das für alle x, y gilt, muss $a = 3$ sein ($a \in \mathbb{R}^+$). Nun setzt man $a(x) := 3e^{3x}$, man erhält $f'(z) = 3e^{3z}$ und weiter $f(z) = e^{3z} + C = e^{3x}(\cos(3y) + i \sin(3y)) + C$, also $v(x, y) = e^{3x} \sin(3y)$. Die Konstante bestimmt man aus $f(0) = e^0(\cos 0 + i \sin 0) + C = 1 + C \stackrel{!}{=} 1 + i$ zu $C = i$.

10. —

11. Beispiel: $f(z) \equiv 0$, $g(z) = \sin z$, $f(z) = g(z)$ für $z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
12.
$$e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} z^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k}}{(2k)!} z^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k+1}}{(2k+1)!} z^{2k+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} = \cos z + i \sin z$$
13.
$$e^a \cdot e^b = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b^m}{m!} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^k \frac{a^\nu}{\nu!} \frac{b^{k-\nu}}{(k-\nu)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^k \frac{k!}{\nu!(k-\nu)!} \frac{a^\nu b^{k-\nu}}{k!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{\nu=0}^k \binom{k}{\nu} a^\nu b^{k-\nu} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (a+b)^k = e^{a+b}$$
14. Wähle zwei Folgen: $a_n = e^{i\pi(1-\frac{1}{n})}$ und $a_n = e^{-i\pi(1-\frac{1}{n})}$. Nun ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Log}(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} i\pi(1 - \frac{1}{n}) = i\pi \neq -i\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} (-i\pi)(1 - \frac{1}{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Log}(b_n)$, das heißt, $\operatorname{Log} z$ ist an $z = -1$ nicht stetig.
15. Mit $f(z) = \frac{(x+iy)^5}{(x^2+y^2)^2}$ für $z \neq 0$ ist $f(x,0) = x$ und $f(0,y) = iy$, also erhält man $u(x,0) = x$, $v(x,0) = 0$, $u(0,y) = 0$ und $v(0,y) = y$. Für die partiellen Ableitungen ergibt das: $\frac{\partial u}{\partial x}|_0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-0}{x} = 1$, $\frac{\partial u}{\partial y}|_0 = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0-0}{y} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial x}|_0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0-0}{x} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial y}|_0 = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y-0}{y} = 1$. Die Cauchy-Riemann-Gleichungen sind also in $z = 0$ erfüllt, aber für Grenzwertdefinition der Ableitung erhält man $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)-f(0)}{z} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^5 e^{5i\varphi}}{r^4 e^{i\varphi}} = e^{4i\varphi}$, und dieser Ausdruck hängt offensichtlich vom Winkel φ ab. Das bedeutet, f ist in $z = 0$ nicht komplex differenzierbar.
16. Wir betrachten $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{1-\frac{1}{n}}$, $n = 2, 3, 4, \dots$. Die Menge $\{\frac{1}{n}\}$ hat den Häufungspunkt $z = 0$, also folgt mit dem Identitätssatz $f(z) = \frac{1}{1-z}$. In $|z| < 1$ ist diese Funktion holomorph, nicht aber in \mathbb{C} , da sie in $z = 1$ nicht einmal definiert ist.
17. Wir nehmen an, $P(z)$ habe keine Nullstelle. Dann ist $\frac{1}{P(z)}$ eine ganze Funktion, und wegen $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |P(z)| = \infty$ ist $\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{1}{P(z)} = 0$, $\frac{1}{P(z)}$ müßte also beschränkt sein. Nach dem Satz von Liouville wäre $\frac{1}{P(z)}$ demnach konstant, und ebenso müßte es $P(z)$ sein. Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung, $P(z)$ sei ein Polynom vom Grad $n \geq 1$.

A.3 Lösungen (Kurvenintegrale)

1. c) $\int_0^1 (t^3 + (i+1)t^2 + (i-1)t + 2i) dt = \left[\frac{t^4}{4} + (i+1)\frac{t^3}{3} + (i-1)\frac{t^2}{2} + 2it \right]_0^1 = \frac{1}{12} + \frac{17}{6}i$
- d) Der Nenner des Integranden hat die Nullstellen $t = -i$ und $t = -1$. Partialbruchzerlegung liefert $\frac{2t}{t^2 + (1+i)t + i} = \frac{1-i}{t+i} + \frac{1+i}{t+1}$. Damit erhält das Integral den Wert
- $$I = (1-i) \int_0^1 \frac{dt}{t+i} + (1+i) \int_0^1 \frac{dt}{t+1} = [(1-i) \log(t+i) + (1+i) \log(t+1)]_0^1 = \frac{6 \ln 2 - \pi}{4} + \frac{2 \ln 2 - \pi}{4}i$$
2. Mögliche Parametrisierungen sind:
- b) $C_1: z(t) = 2 + 2i + (-3 - 3i)t$, $t \in [0, 1]$; $C_2: z(t) = -i + e^{it}$, $t \in [-\pi, 0]$;
 $C_3: z(t) = -1 - i + 2e^{it}$, $t \in [-\pi, 0]$
- c) $C_1: z(t) = -2 + it$, $t \in [-2, 0]$; $C_2: z(t) = 2e^{it}$, $t \in [\pi, \frac{\pi}{2}]$; $C_3: z(t) = i + e^{it}$, $t \in [\frac{\pi}{2}, 0]$;
 $C_4: z(t) = 1 + it$, $t \in [1, 0]$; $C_5: z(t) = e^{it}$, $t \in [0, -\frac{3\pi}{2}]$
3. b) Parametrisierung der Kurven: $C_1: z(t) = e^{it}$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $dz = ie^{it} dt$ und $z(t) = i - t$, $t \in [0, 1]$, $dz = -dt$;
 $C_2: z(t) = e^{it}$, $t \in [0, -\pi]$, $dz = ie^{it} dt$ und $z(t) = -1 + it$, $t \in [0, 1]$, $dz = i dt$;

$$\int_{C_1} \bar{z} dz = \int_0^{\pi/2} e^{-it} i e^{it} dt + \int_0^1 (-i-t)(-dt) = i \int_0^{\pi/2} dt + i \int_0^1 dt + \int_0^1 t dt = \frac{1}{2} + i \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\int_{C_2} \bar{z} dz = \int_0^{-\pi} e^{-it} i e^{it} dt + \int_0^1 (-1-it)i dt = i \int_0^{-\pi} dt - i \int_0^1 dt + \int_0^1 t dt = \frac{1}{2} - i(1 + \pi)$$

$$\int_{C_1} \operatorname{Re} z dz = \int_0^{\pi/2} \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} i e^{it} dt + \int_0^1 (-t)(-dt) = \frac{i}{2} \int_0^{\pi/2} e^{2it} dt + \frac{i}{2} \int_0^{\pi/2} dt + \int_0^1 t dt = i \frac{\pi}{4}$$

$$\int_{C_2} \operatorname{Re} z dz = \int_0^{-\pi} \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} i e^{it} dt + \int_0^1 (-1)i dt = -\frac{i}{2} \int_{-\pi}^0 e^{2it} dt - \frac{i}{2} \int_{-\pi}^0 dt - i \int_0^1 t dt = -i \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\int_{C_k} e^{\pi z} dz = \frac{e^{\pi z}}{\pi} \Big|_1^{-1+i} = -\frac{e^{\pi} + e^{-\pi}}{\pi} \quad \int_{C_k} z^5 dz = \frac{z^6}{6} \Big|_1^{-1+i} = \frac{8i-1}{6} \quad k=1,2$$

c)

4. a) Parametrisierung der Kurve:

$C_1: z(t) = -1 - i + 2it, t \in [0, 1], dz = 2i dt; C_2: z(t) = i + e^{it}, t \in [\pi, 0], dz = ie^{it} dt;$

$C_3: z(t) = 1 + i - it, t \in [0, 1], dz = -i dt; C_4: z(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-it}, t \in [0, \pi], dz = -\frac{i}{2}e^{-it} dt.$

Für die Integrale erhält man

$$I_{I1} = \int_{C_1} \bar{z} dz = \int_0^1 (-1 + i - 2it) 2i dt = -2i$$

$$I_{I2} = \int_{C_2} \bar{z} dz = \int_{\pi}^0 (-i + e^{-it}) ie^{it} dt = -\int_0^{\pi} (e^{it} + i) dt = -\frac{e^{i\pi} - 1}{i} - i\pi = (-2 - \pi)i$$

$$I_{I3} = \int_{C_3} \bar{z} dz = \int_0^1 (1 - i + it)(-i) dt = \left[(-i - 1)t + \frac{t^2}{2} \right]_0^1 = -\frac{1}{2} - i$$

$$I_{I4} = \int_{C_4} \bar{z} dz = \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{it} \right) \left(-\frac{i}{2}e^{-it} \right) dt = -\frac{i}{4} \int_0^{\pi} (1 + e^{-it}) dt = -\frac{1}{2} - \frac{i\pi}{4}$$

b)

5. Der Satz von Morera lautet: f sei stetig in einem Gebiet G . Wenn das Integral über jede geschlossene Kurve, die ganz in G liegt, gleich Null ist, dann ist f in G holomorph. Man finde ein Beispiel, welches zeigt, dass der Satz nicht mehr gilt, wenn man die Voraussetzung der Stetigkeit fallen läßt.

6. Es ist $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$, und wenn wir $z = e^{ix}$ setzen, ergibt das $\cos x = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$, $dx = \frac{dz}{iz}$. Damit erhält das Integral die Gestalt

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{1}{4^p} \left(z + \frac{1}{z} \right)^{2p} \frac{dz}{iz} = -\frac{i}{4^p} \oint \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} z^k \left(\frac{1}{z} \right)^{2p-k} dz =$$

A.4 Lösungen (Laurentreihen und Residuensatz)

1.

2. —

3. b) $f(z) = \text{Log } z$ hat die einzige Singularität bei $z = 0$. Die Entwicklung um $z_0 = 2 + i$ erhält man den Konvergenzradius $R = |2 + i - 0| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$.

c) $f(z) = 1/\sin \frac{1}{z}$ hat Singularitäten für $z = 0$ und für $\sin \frac{1}{z} = 0$, also $z = \frac{1}{k\pi}$. Jene Singularität, die $z_0 = \frac{1}{\pi} + i$ am nächsten liegt, ist $z = \frac{1}{\pi}$, der Konvergenzradius ist $R = \left| \frac{1}{\pi} + i - \frac{1}{\pi} \right| = |i| = 1$.

4. Es ist $\sin u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} u^{2n+1} = u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} \mp \dots$, also ist für $u = \frac{1}{z^2}$

$$\sin \frac{1}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{z^{2n+1}} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!} \frac{1}{z^6} + \frac{1}{5!} \frac{1}{z^{10}} \mp \dots$$

5. $f(z) = \frac{1}{z^2 - 2iz} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{z - 2i}$

Entwicklung um $z = 0$:

$$f(z) = -\frac{1}{z} \frac{1}{2i - z} = -\frac{1}{2iz} \frac{1}{1 - \frac{z}{2i}} = -\frac{1}{2iz} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2i} \right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(2i)^{n+1}} \text{ für } 0 < |z| < 2$$

$$f(z) = \frac{1}{z} \frac{1}{z - 2i} = \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2i}{z} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2i)^n}{z^{n+2}} \text{ für } |z| > 2$$

...

6. b) $I = \frac{\pi}{3}$

A.5 Lösungen (Weitere Sätze und Begriffe)

A.6 Literaturangaben