Lösungen der Übungsaufgaben zur Analysis T1, WS 2004/05

Klaus Lichtenegger

8. November 2004

Inhaltsverzeichnis

1 Lösungen – Kapitel Eins

1.

2 Kapitel Zwei

1. Beweis mittels vollständiger Induktion:

$n=1$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1 = 1^2 = \left(\sum_{k=1}^{1} k\right)^2$ stimmt.

$n \to n+1$: Am elegantesten schreibt sich der Induktionsschritt in der Form

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 \overset{A(n)}{=} \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 + (n+1)^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 + n\,(n+1)^2 + (n+1)^2 = \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 + 2\,(n+1)\,\frac{n\,(n+1)}{2} + (n+1)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 + 2\,(n+1)\cdot\sum_{k=1}^{n} k + (n+1)^2 = \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} k + (n+1)\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^2\end{aligned}$$

In der Praxis ist es bei solchen Beispielen wesentlich zielführender, sowohl die linke als auch die rechte Seite von $A(n+1)$ (eine davon natürlich unter Verwendung der Induktionsannahme) so weit wie möglich zu vereinfachen und damit ihre Gleichheit nachzuweisen.

2. Wir erhalten

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e \cdot \frac{1}{e} = 1$$

3. Beweis mittels vollständiger Induktion:

$n=1$: $7^1 - 2^1 = 5$ ist durch 5 teilbar.

$n \to n+1$: $7^{n+1} - 2^{n+1} = 7\cdot 7^n - 2\cdot 2^n == 7 \cdot \underbrace{(7^n - 2^n)}_{\text{durch 5 teilbarlautAnn.}} + \underbrace{5\cdot 2^n}_{\text{durch 5 teilbar}}$ ist durch 5 teilbar.

4. Zuerst wird die Monotonie der Folge überprüft:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \ldots - \frac{1}{2n} = \\ &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{2}{2n+2} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0,\end{aligned}$$

die Folge ist also streng monoton wachsend, die Differenz der Folgenglieder wird aber immer kleiner. Findet man nun noch eine obere Schranke, so ist die Konvergenz nachgewiesen. Man kann aber auf jeden Fall abschätzen:

$$a_n = \underbrace{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ Terme}} \le \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}}_{n \text{ Terme}} = n \cdot \frac{1}{n} = 1,$$

Eins ist also eine obere Schranke. Demnach ist die Folge konvergent.

5. Zuerst stellen wir fest, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\frac{n-1}{3n+1} \le \frac{n + \sin n}{3n+1} \le \frac{n+1}{3n+1}$$

Wegen $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{3n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3n+1} = \frac{1}{3}$ ist nach dem Sandwich-Kriterium auch $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{3}$.

6. Anwendung des Wurzelkriteriums liefert:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+2}\right)^{2n^2}} = \left(\frac{n}{n+2}\right)^{2n} = \frac{1}{(1+\frac{2}{n})^{2n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{e^4} < 1$$

Die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+2}\right)^{2n^2}$ ist also konvergent.

7. Beweis mittels vollständiger Induktion:

$n=1$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} \frac{2k+1}{k^2\,(k+1)^2} = \frac{2+1}{1\cdot 2^2} = \frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{2^2}$ stimmt.

$n \to n+1$: Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{2k+1}{k^2\,(k+1)^2} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2\,(k+1)^2} + \frac{2(n+1)+1}{(n+1)^2\,(n+1+1)^2} = \\
&\overset{A(n)}{=} 1 - \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{2n+3}{(n+1)^2\,(n+2)^2} = 1 - \frac{(n+2)^2 - 2n - 3}{(n+1)^2\,(n+2)^2} = \\
&= 1 - \frac{n^2+4n+4-2n-3}{(n+1)^2\,(n+2)^2} = 1 - \frac{n^2+2n+1}{(n+1)^2\,(n+2)^2} = \\
&= 1 - \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2\,(n+2)^2} = 1 - \frac{1}{([n+1]+1)^2}
\end{aligned}$$

Nun ist es überhaupt kein Problem, den Wert der unendlichen Reihe zu ermitteln:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{k^2\,(k+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2\,(k+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \left\{ 1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right\} = 1$$

3 Kapitel Drei

1.

4 Kapitel Vier

1. Man erhält für die ersten Ableitung von $f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2}$ die Ausdrücke

$$\begin{aligned} f'(x) &= \tfrac{1}{2}\,(1+x)^{-1/2} & \qquad f^{(3)}(x) &= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{2}\,(1+x)^{-5/2} \\ f''(x) &= -\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\,(1+x)^{-3/2} & \qquad f^{(4)}(x) &= -\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{5}{2}\,(1+x)^{-7/2} \end{aligned}$$

und kann für den allgemeinen Ausdruck (mit $n \geq 2$) vermuten:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\,\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2^n}\,(1+x)^{-(2n-1)/2}$$

Zum Beweis bildet man (im Induktionsschritt)

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= -\frac{2n-1}{2}\,(-1)^{n+1}(x)\,\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2^n}\,(1+x)^{-(2n-1)/2-1} \\ &= (-1)^{n+2}(x)\,\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-3)\cdot(2n-1)}{2^{n+1}}\,(1+x)^{-(2n+1)/2}, \end{aligned}$$

die Formel stimmt tatsächlich.

2.

3.

4. $L_1 = \lim\limits_{x\to 1}\left(x - \sqrt{(x-2)\,(x+3)}\right)\cdot\dfrac{x+\sqrt{(x-2)\,(x+3)}}{x+\sqrt{(x-2)\,(x+3)}} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-(x-2)\,(x+3)}{x+\sqrt{(x-2)\,(x+3)}} =$
$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-1+\frac{6}{x}}{1+\sqrt{(1-\frac{2}{x})\,(1+\frac{3}{x})}} = -\dfrac{1}{2}$

5.

6. Auflösen nach der binomischen Formel und ableiten liefert:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(1+x)^m &\overset{?}{=} m(1+x)^{m-1} \\ \frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}1^k x^{m-k} &\overset{?}{=} m\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m-1}{k}1^k x^{m-1-k} \\ \sum_{k=0}^{m-1}\binom{m}{k}(m-k)x^{m-k-1} &\overset{?}{=} \sum_{k=0}^{m-1} m\binom{m-1}{k}x^{m-k-1} \end{aligned}$$

Nun kann man für beliebige k die Koeffizienten links und rechts vergleichen:

$$\begin{aligned} \text{links}: &\quad \binom{m}{k}(m-k) = \frac{m\,!}{k\,!\,(m-k)\,!}\,(m-k) = \frac{m\,!}{k\,!\,(m-k-1)\,!} \\ \text{rechts}: &\quad m\binom{m-1}{k} = m\,\frac{(m-1)\,!}{k\,!\,(m-k-1)\,!} = \frac{m\,!}{k\,!\,(m-k-1)\,!} \end{aligned}$$

und diese Ausdrücke stimmen überein.

5 Kapitel Fünf

1.