Beispiel: Wir untersuchen die rekursiv definierte Folge

$$a_0 = 1 \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 2}$$

auf Konvergenz. Berechnen der ersten paar Folgenglieder liefert:

$$(a_n) = \left(1, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{7}, \tfrac{1}{15}, \ldots\right)$$

Wir können also vermuten, dass die Folge monoton fallend und mit $0 \leq a_n \leq 1$ beschränkt ist. Beweisen wir zunächst die Beschränktheit:

- Induktionsanfang: $0 \leq a_0 = 1 \leq 1$ stimmt
- Induktionsannahme: $0 \leq a_n \leq 1$
- Induktionsbehauptung: $0 \leq a_{n+1} \leq 1$
- Induktionsschritt: Wir addieren zunächst 2 zur Induktionsannahme (um letztliche auf die richtige Form für a_{n+1} zu kommen:

  $$2 \leq a_n + 2 \leq 3$$

  Diese Ungleichungskette ordnen wir noch um:

  $$3 \geq a_n + 2 \geq 2$$

  Nun können wir dividieren:

  $$\frac{0 \leq a_n \leq 1}{3 \geq a_n + 2 \geq 2} \rightarrow 0 = \frac{0}{3} \leq \frac{a_n}{a_n + 2} = a_{n+1} \leq \frac{1}{2} \leq 1$$

  Damit ist die Beschänktheit bewiesen.

Nun untersuchen wir die Monotonie. Unsere Vermutung ist, dass immer $a_n \geq a_{n+1}$ ist. Um das zu beweisen setzen wir wieder Induktion ein:

- Induktionsanfang: $a_0 = 1 \geq \frac{1}{3} = a_1$ stimmt
- Induktionsannahme: $a_n \geq a_{n+1}$
- Induktionsbehauptung: $a_{n+1} \geq a_{n+2}$
- Induktionsschritt: Wir addieren wieder 2 zur Induktionsannahme:

  $$a_n + 2 \geq a_{n+1} + 2$$

  Wieder bilden wir den Reziprokwert

  $$\frac{1}{a_n + 2} \leq \frac{1}{a_{n+1} + 2} \tag{1}$$

und multiplizieren mit (-1):

$$-\frac{1}{a_n+2} \geq -\frac{1}{a_{n+1}+2}$$

Jetzt addieren wir 1 zu dieser Ungleichungskette:

$$1-\frac{1}{a_n+2} \geq 1-\frac{1}{a_{n+1}+2}$$

Auf gleichen Nenner gebracht liest sich das:

$$\frac{a_n+1}{a_n+2} \geq \frac{a_{n+1}+1}{a_{n+1}+2}$$

Anders angeschrieben:

$$\frac{a_n}{a_n+2}+\frac{1}{a_n+2} \geq \frac{a_{n+1}}{a_{n+1}+2}+\frac{1}{a_{n+1}+2}$$

Nun subtrahieren wir noch auf beiden Seiten $\frac{1}{a_n+2}$ und erhalten:

$$\frac{a_n}{a_n+2} \geq \frac{a_{n+1}}{a_{n+1}+2}+\left(\frac{1}{a_{n+1}+2}-\frac{1}{a_n+2}\right) \tag{2}$$

Aus der Induktionsannahme folgte ja bereits (1), und daher ist auch

$$\frac{1}{a_{n+1}+2}-\frac{1}{a_n+2} \geq 0.$$

Demnach gilt aber sicher

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{a_n+2} \geq \frac{a_{n+1}}{a_{n+1}+2}=a_{n+2},$$

denn diese Ungleichung gilt ja sogar noch in der verschärften Variante (2), bei der auf der rechten Seite noch zusätzlich eine nichtnegative Größe addiert wird. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Bei diesem Beispiel würde sich übrigens eine einfachere Art anbieten, die Monotonie zu untersuchen:

$$\begin{aligned} a_{n+1}-a_n &= \frac{a_n}{a_n+2}-a_n=\frac{a_n-a_n\cdot(a_n+2)}{a_n+2}= \\ &= \frac{-a_n^2-a_n}{a_n+2}=-\frac{a_n^2+a_n}{a_n+2} \leq 0 \end{aligned}$$

Wegen $a_n \geq 0$ ist damit immer $a_{n+1}-a_n \leq 0$ und die Folge ist monoton fallend.

Hier lässt sich die Konvergenz sogar auf folgende Weise begründen: Wenn a_n positiv ist, dann ist das sicher auch a_n+2 und damit auch $a_{n+1}=\frac{a_n}{a_n+2}$ als Quotient

zweier positiver Größen. Ist aber $a_n \geq 0$, dann ist sicher $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n+2} < a_n$, da ja durch einen Ausdruck dividiert wird, der größer als Eins ist. Aus Beschränktheit und Monotonie folgt sofort die Konvergenz.
Alternativ hätten wir auch das Cauchy-Kriterium verwenden können: Dazu werden wir zwar an gegebener Stelle die (bereits bewiesene) Beschränktheit verwenden, aber nie auf die Monotonie zurückgeifen:

$$\begin{aligned}
|a_{n+2} - a_{n+1}| &= \left| \frac{a_{n+1}}{a_{n+1}+2} - \frac{a_n}{a_n+2} \right| = \\
&= \left| \frac{a_{n+1} \cdot (a_n + 2) - a_n \cdot (a_{n+1} + 2)}{(a_{n+1} + 2) \cdot (a_n + 2)} \right| = \\
&= \left| \frac{2 \cdot (a_{n+1} - a_n)}{(a_{n+1} + 2) \cdot (a_n + 2)} \right| \leq \\
&/\!/ \text{Nun benutzen wir die Beschränktheit} /\!/ \\
&\leq \frac{2}{4} \cdot |a_{n+1} - a_n| = \frac{1}{2} \cdot |a_{n+1} - a_n|
\end{aligned}$$

Wir haben also eine Ungleichung der Form

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq \alpha \, |a_{n+1} - a_n)|$$

mit $\alpha < 1$ gefunden (hier $\alpha = \frac{1}{2}$). Mittels Dreiecksungleichung sowie geometrischer Summenformel (siehe Skriptum) folgt nun sofort, das (a_n) eine Cauchy-Folge ist:

$$\begin{aligned}
|a_{n+k} - a_n| &= |a_{n+k} - a_{n+k-1} + a_{n+k-1} - a_{n+k-2} \pm \ldots + a_{n+1} - a_n| \leq \\
&\leq |a_{n+k} - a_{n+k-1}| + |a_{n+k-1} - a_{n+k-2}| + \ldots + |a_{n+1} - a_n| \leq \\
&\leq \left(\alpha^{k-1} + \alpha^{k-2} + \ldots + \alpha + 1 \right) \cdot |a_{n+1} - a_n| = \\
&= \frac{1 - \alpha^k}{1 - \alpha} \cdot |a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{1 - \alpha} \cdot \alpha^n \, |a_1 - a_0| = \\
&= \alpha^n \cdot \frac{|a_1 - a_0|}{1 - \alpha} = \left(\frac{1}{2} \right)^n \cdot \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{4}{3} < \varepsilon \\
&\text{für hineichend große } n
\end{aligned}$$

Auf welche Art auch immer man die Konvergenz nachgewiesen hat, die Berechnung des Grenzwerts ist nun eine eher elementare Angelegenheit: Es gilt $a_n \to a$ und damit natürlich auch $a_{n+1} \to a$. Damit wird die Rekursionsformel zu:

$$a = \frac{a}{a+2} \iff a^2 + 2a = a \iff a^2 + a = 0 \iff a(a+1) = 0$$

mit den beiden Lösungen $a = 0$ und $a = -1$. Wegen $a_n \geq 0$ kann hier nur die erste Lösung zutreffen, der Grenzwert ist Null.

Beispiel: Wir untersuchen die beiden Folgen

$$\begin{array}{lll} a_1 = 1 & a_2 = 2 & a_{n+2} = \frac{1}{3}a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n \\ b_1 = 1 & b_2 = 2 & b_{n+2} = \frac{2}{3}a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n \end{array}$$

auf Konvergenz. Berechnen der ersten Folgenglieder liefert:

n	a_n	b_n
1	1	1
2	2	2
3	$\frac{7}{6} \approx 1,166667$	$\frac{11}{6} \approx 1,833333$
4	$\frac{25}{18} \approx 1,388889$	$\frac{20}{9} \approx 2,222222$
5	$\frac{127}{108} \approx 1,175926$	$\frac{281}{108} \approx 2,601852$
6	$\frac{352}{324} \approx 1,086420$	$\frac{922}{324} \approx 2,845679$

Das ist zwar weit weg von eindeutigen Trends, aber man kann doch schon vermuten, dass (a_n) nach ersten Schwankungen monoton fallend und zudem nach unten beschränkt, also konvergent ist, während (b_n) monton zu wachsen scheint und möglicherweise sogar divergent ist.

Die Beschränktheit nach unten von (a_n) beweist man ohne Pobleme: Wenn a_n und a_{n+1} größer gleich Null sind, so ist auch

$$a_{n+2} = \frac{1}{3}a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n \geq 0.$$

Auch die Beschränktheit nach oben mit Zwei beweist man leicht,

$$a_{n+2} = \frac{1}{3}a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n \leq \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3} \leq 2,$$

man benötigt sie aber in diesem Zusammenhang gar nicht.

Nun zur Monotonie: Setzen wir als Induktionsannahme $a_{n+1} \leq a_n$ und $a_{n+2} \leq a_{n+1}$ voraus (der Induktionsanfang gelingt bei $n = 4$), so gilt:

$$\begin{aligned} a_{n+2} - a_{n+3} &= \frac{1}{3}a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n - \frac{1}{3}a_{n+2} - \frac{1}{2}a_{n+1} = \\ &= \frac{1}{3}\underbrace{(a_{n+1} - a_{n+2})}_{\geq 0} + \frac{1}{2}\underbrace{(a_n - a_{n+1})}_{\geq 0} \geq 0 \end{aligned}$$

Damit ist aber auch $a_{n+3} \leq a_{n+2}$, was zu beweisen war. Die Folge (a_n) ist beschänkt und monoton, also konvergent, und für ihren Grenzwert erhält man

$$a = \frac{1}{3}\,a + \frac{1}{2}\,a = \frac{5}{6}\,a$$

mit der einzigen möglichen Lösung $a = 0$.

Nun versuchen wir, das monotone Wachsen von (b_n) zu zeigen: Wir nehmen an, es sei $a_{n+1} \geq a_n$ und $a_{n+2} \geq a_{n+1}$. (Induktionsanfang mit $n = 3$.) Dann erhalten wir:

$$\begin{aligned} a_{n+3} - a_{n+2} &= \frac{2}{3}a_{n+2} + \frac{1}{2}a_{n+1} - \frac{2}{3}a_{n+1} - \frac{1}{2}a_n = \\ &= \frac{2}{3}\underbrace{(a_{n+2} - a_{n+1})}_{\geq 0} + \frac{1}{2}\underbrace{(a_{n+1} - a_n)}_{\geq 0} \geq 0 \end{aligned}$$

Die Folge ist also monoton wachsend. Wäre sie konvergent, dann erhielte man für den Grenzwert b die Gleichung

$$b = \frac{2}{3}\,b + \frac{1}{2}\,b = \frac{7}{6}\,b,$$

wiederum mit der einzigen Lösung $b = 0$. Die die Folge aber ab $n = 3$ monoton wächst und $b_3 > 0$ ist, kann das kein zulässiger Grenzwert sein, die Folge muss divergieren.

Beispiel: Nun untersuchen wir die beiden Folgen:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \quad a_{n+1} = a_n + 3^{-n} \\ b_1 &= 1 \quad b_{n+1} = b_n + 3^{1/n} \end{aligned}$$

Die erste Folge hat die Glieder

$$(a_n) = \left(1,\, 1 + \frac{1}{3},\, 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9},\, 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{3^3}, \ldots\right)$$

Man kann also vermuten:

$$a_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{3}\right)^k$$

Das stimmt sicher für $n = 0$, und der Induktionsschritt liefert:

$$a_{n+1} = a_n + +3^{-n} \overset{\text{Ann.}}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{3}\right)^k + \left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k$$

Damit weiß man natürlich, dass (a_n) konvergiert und kennt sogar den Grenzwert

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - (\frac{1}{3})^n}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

Für die zweite Folge erhalten wir

$$(b_n) = \left(1,\, 1 + 3,\, 1 + 3 + \sqrt{3},\, 1 + 3 + \sqrt{3} + \sqrt[3]{3}, \ldots\right)$$

Die Differenz zweier aufeinanderfolgender Glieder ist

$$b_{n+1} - b_n = b_n + 3^{1/n} - b_n = 3^{1/n} = \sqrt[n]{3} \geq 1$$

damit wächst (b_n) über jede Schranke und ist bestimmt divergent.