Freiwillige Übungsbeispiele zur Analysis T1, WS 2004/05

Klaus Lichtenegger

8. November 2004

Inhaltsverzeichnis

1 Ergänzungen (Teil Eins)

1. *Kommissar K hat drei Tatverdächtige A, B und C, von denen er weiß:*

   - *Wenn A oder B schuldig sind, muss C unschuldig sein.*
   - *Wenn B schuldig oder C unschuldig ist, ist A ein Täter.*
   - *A muss unschuldig oder C schuldig sein.*

   Wie viele und welche der der Verdächtigen sind schuldig?

2. *Man beweise die folgenden wichtigen Äquivalenzen:*

$$\begin{array}{rcl rcl}
A \wedge B & \iff & B \wedge A & A \vee B & \iff & B \vee A \\
(A \wedge B) \wedge C & \iff & A \wedge (B \wedge C) & (A \vee B) \vee C & \iff & A \vee (B \vee C) \\
A \wedge (B \vee C) & \iff & (A \wedge B) \vee (A \wedge C) & A \vee (B \wedge C) & \iff & (A \vee B) \wedge (A \vee C)
\end{array}$$

   Dies sind die aussagenlogischen Formulierungen von Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetz. Unmittelbar klar, aber wichtigt genug, um trotzdem Schwarz auf Weiß festgehalten zu werden, sind auch die folgenden Beziehungen:

$$\begin{array}{lll}
A \wedge f \iff f & A \wedge w \iff A & A \wedge \neg A \iff f \\
A \vee f \iff A & A \vee w \iff w & A \vee \neg A \iff w
\end{array}$$

3. *Versuchen Sie, die Implikation $\rightarrow$ bzw. die Äquivalenz $\Leftrightarrow$ nur durch UND, ODER und NICHT auszudrücken.*

4. *Jede beliebige Aussage, die durch ihre Wahrheitstafel gegeben ist, kann auf zwei fundamentale Arten dargestellt werden: In der* konjunktiven Normalform *als Konjunktion von Disjunktionen der beteiligten Variablen und ihrer Negationen, und in der* disjunktiven Normalform *als Disjunktion von entsprechenden Konjunktionen.*

   - *Bestimmen Sie diese beiden Normalformen für die Aussage G, deren Wahrheitstafel rechts dargestellt ist!*
   - *Geben Sie jeweils einen Algorithmus (d.h. ein Kochrezept) an, um für eine beliebige Wahrheitstafel die konjunktive bzw. die disjunktive Normalform zu erhalten.*

A	B	C	G	A	B	C	G
w	w	w	w	f	w	w	w
w	w	f	f	f	w	f	f
w	f	w	f	f	f	w	w
w	f	f	f	f	f	f	w

2 Ergänzungen (Teil Zwei)

1. *Man beweise für alle $n \geq 1$ die Gültigkeit von:*

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k \right)^2$$

2. *Man berechne den Grenzwert der Folge* $a_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$.

3. *Beweisen Sie:* $7^n - 5^n$ *ist für alle* $n \in \mathbb{N}$ *durch* 5 *teilbar.*

4. *Man untersuche die Folge* $\{a_n\}$ *mit*

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

auf Konvergenz.

5. *Man untersuche die Folge* $\{a_n\}$ *mit*

$$a_n = \frac{n + \sin n}{3n+1}$$

auf Konvergenz und berechne gegebenenfalls den Grenzwert.

6. *Man untersuche die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+2} \right)^{2n^2}$$

auf Konvergenz.

7. *Beweisen Sie die Summenformel*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2\,(k+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$$

und bestimmen Sie den Wert der unendlichen Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{k^2\,(k+1)^2}$$

8. *Ein schwer Betrunkener kommt spät (bzw. recht früh) nach Hause und steht nun vor der Haustür. An seinem Schlüsselbund befinden sich N Schlüssel, die er in seinem Zustand nicht mehr unterscheiden kann und die er deshalb auf gut Glück probiert. Nun ist aber nicht nur zu betrunken, um den Haustorschlüssel noch zu erkennen, er vergißt sogar zwischen jedem Versuch wieder, welche Schlüssel er schon probiert hat. Wie viele Versuche benötigt er im Mittel, bis er den richtigen Schlüssel erwischt?*

9. *Untersuchen Sie, für welche Werte von* $q \in \mathbb{R}$ *die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n q^n$$

konvergiert und bestimmen Sie für diese Fälle den Wert der Reihe.

3 Ergänzungen (Teil Drei)

1.

4 Ergänzungen (Teil Vier)

1. *Man berechne die ersten vier Ableitungen* f' *bis* $f^{(4)}$ *der Funktion* $f(x) = \sqrt{1+x}$. *Weiters stelle man eine allgemeine Formel für die* n*-te Ableitung* $f^{(n)}$ *auf, überprüfe, ab wann diese git und beweise sie mittels vollständiger Induktion.*

2. *Man bestimme die Potenzreihenentwicklung der Funktion*

$$f(x) = e^{-x} + \frac{1}{1-x}$$

um den Punkt $x = 0$ *und ermittle den Konvergenzradius dieser Reihe.*

3. *Man berechne die folgenden Grenzwerte:* $L_1 = \lim\limits_{x \to 1} \left(x - \sqrt{(x-2)(x+3)} \right)$

4. *Man berechne den Grenzwert*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x + \frac{1}{2}}{\sqrt{x^2 + x}}$$

a) ohne, b) mit Anwendung der Regel von De l'Hospital.

5. *Man zeige die Ableitungsformel*

$$\frac{d}{dx}(1+x)^m = m(1+x)^{(m-1)}$$

mittels Koeffizientenvergleich.

5 Ergänzungen (Teil Fünf)

1.