Konversatoriumsunterlagen zur Analysis T1, WS 2004/05

Klaus Lichtenegger

26. Januar 2005

Inhaltsverzeichnis

1 Übungsaufgaben – Logik

An einer Weggabelung in der Wüste leben zwei Brüder, die vollkommen gleich aussehen, zwischen denen es aber einen gewaltigen Unterschied gibt: Der eine sagt immer die Wahrheit, der andere lügt immer. Schon halb verdurstet kommt man zu dieser Weggabelung und weiß genau: Einer der beiden Wege führt zu einer Oase, der andere hingegen immer tiefer in die Wüste hinein. Man darf aber nur einem der Brüder (man weiß nicht, welcher es ist) genau eine Frage stellen. Was muß man fragen, um sicher den Weg zur Oase zu finden?

Es ist klar, daß man nicht einfach „Welcher Weg führt zur Oase?“ fragen darf; die Antwort könnte ebensogut wahr wie falsch sein . Auch „Sagst du die Wahrheit?“ bringt einen nicht weiter, außerdem hat man ja nur eine einzige Frage frei. Der Ausweg besteht darin, eine Tautologie zu konstruieren: Fragt man nämlich „Von welchem Weg würde dein Bruder sagen, daß er zur Oase führt?“, so erhält man von beiden Brüdern jeweils die gleiche Auskunft – und weiß, daß man den anderen Weg nehmen muss.

*Beweisen Sie die Abtrennregel (*modus ponens*):* $\boxed{(A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B}$

Der Beweis erfolgt am einfachsten mittels Wahrheitstafeln. Die Abtrennregel ist übrigens auch eine recht häufig auftretende Schlussfigur, von der man zumindes einmal gehört haben sollte.

A	B	$(A$	$\wedge$	$(A \rightarrow B))$	$\rightarrow B$
w	w		w	w	**w**
w	f		f	f	**w**
f	w		f	w	**w**
f	f		f	w	**w**

Beweisen Sie die Äquivalenzen $(A \vee B) \Leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$ *und* $(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$.

A	B	$(A \vee B)$	$\Leftrightarrow$	$\neg$	$(\neg A$	$\wedge$	$\neg B)$	$(A \wedge B)$	$\Leftrightarrow$	$\neg$	$(\neg A$	$\vee$	$\neg B)$
w	w	w	**w**	w	f	f	f	w	**w**	w	f	f	f
w	f	w	**w**	w	f	f	w	f	**w**	f	f	w	w
f	w	w	**w**	w	w	f	f	f	**w**	f	w	w	f
f	f	f	**w**	f	w	w	w	f	**w**	f	w	w	w

Wie viele binäre (also zwei Aussagen verknüpfende) Junktoren gibt es?

Bei zwei Aussagen gibt es vier mögliche Kombinationen von Wahrheitswerten, jeder davon kann entweder w oder f zugewiesen werden. Ingesamt gibt es also $N = 2^4 = 16$ verschiedene Junktoren, zu denen eben auch die vorgestellen $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\uparrow$ und ^{X} gehören.

Sie haben einen Satz Karten, jeweils mit einem Buchstaben auf der einen und einer Zahl auf der anderen Seite. Wie viele und welche der rechts dargestellten Karten müssen Sie mindestens umdrehen, um die Aussage „Wenn auf einer Seite einer Karte ein Vokal ist, dann ist auf der anderen Seite eine gerade Zahl“ zu überprüfen?

A	**Z**	**7**	**8**

Auf jeden Fall umdrehen muss man die Karten „A“ und „7“. Auf der Rückseite von „A“ müßte, sollte die Aussage wahr sein, eine gerade Zahl stehen, auf der Rückseite von „7“ ein Konsonant. Was auf den Rückseiten der anderen beiden Karten steht, ist für die Überprüfung der Aussage hingegen irrelevant.

Diskutieren sie a) die Aussage des Kreters Epimenides „Alle Kreter sind Lügner“, b) die Aussage „Diese Aussage ist falsch“. Wo liegt ein echtes, wo nur ein scheinbares Paradoxon vor und wie läßt sich zweiteres auflösen?

2 Übungsaufgaben – Gleichungen

Man löse die folgenden Gleichungen nach x auf:
a) $\dfrac{x+1}{x} = a$, *b)* $\dfrac{x+1}{3x-7} = 2$, *c)* $4 + \dfrac{1}{4+\frac{1}{x}} = a$, *d)* $\dfrac{x}{x+1} + \dfrac{2}{x-1} = 1$

a) $x+1 = ax \qquad x - ax = -1 \qquad (1-a)x = -1 \qquad x = \frac{1}{a-1}$.

b) $x+1 = 2\,(3x-7) \qquad x+1 = 6x-14 \qquad -5x = -15 \qquad x = 3$.

c) $\frac{1}{4+\frac{1}{x}} = a-4 \qquad \frac{1}{a-4} = 4 + \frac{1}{x} \qquad \frac{1}{x} = \frac{1}{a-4} - 4 = \frac{1}{a-4} - \frac{4a-16}{a-4} = \frac{17-4a}{a-4} \qquad x = \frac{a-4}{17-4a}$.

d) $x\,(x-1) + 2\,(x+1) = x^2 - 1 \qquad x^2 - x + 2x + 2 = x^2 - 1 \qquad x = -3$.

Man finde alle reellen Lösungen x der folgenden Gleichungen:
a) $x^3 - 2x^2 - 3x = 0$, *b)* $x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x = 0$, *c)* $x^2 + 10 = 6x$.

a) Das Produkt $x \cdot (x^2 - 2x - 3)$ wird Null, wenn zumindest einer der Faktoren Null wird, also $x = 0$ oder $x^2 - 2x - 3 = 0$. Als Lösungen der quadratischen Gleichung erhält man $x = 1 \pm \sqrt{1+3}$, also $x = 1 \pm 2$. Die drei Lösungen sind $x_1 = 0$, $x_2 = -1$ und $x_3 = 3$.

b) Die linke Seite der Gleichung läßt sich relativ leicht faktorisieren: x kann man direkt herausheben und man errät schnell eine Lösung $x = -1$ der verbleibenden kubischen Gleichung.

$$x \cdot (x^3 + x^2 + 2x + 2) = 0 \qquad x \cdot (x+1) \cdot (x^2 + 2) = 0$$

Man erhält also die reellen Lösungen $x_1 = 0$ und $x_2 = -1$. (Zusätzlich gibt es noch die beiden konjugiert komplexen Lösungen $x_{3,4} = \pm\sqrt{2}\,i$.)

c) Entweder aus der Lösungsformel für quadratische Gleichungen, $x = 3 \pm \sqrt{9-10}$, oder durch Ergänzen auf vollständige Quadrate, $(x-3)^2 = -1$, erkennt man, dass die Gleichung keine reelle Lösung x hat ($x_{1,2} = 3 \pm i$).

Man löse das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrrrl} I) & x & +y & -z & = 1 \\ II) & 2x & -y & +2z & = 9 \\ III) & x & +3y & -2z & = 3 \end{array}$$

Zuerst addieren wir die zweite und die dritte Gleichung bzw. zählen das Doppelte der ersten zur zweiten hinzu:

$$A = II + III) : 3x + 2y = 12 \qquad B = II + 2 \cdot I) : 4x + y = 11$$

Nun subtrahieren wir das Doppelte von Gl. (B) von Gl. (A): $A - 2B) : -5x = -10$, daraus folgt sofort $x = 2$. Etwa mit Gl. (B) erhält man weiter $8 + y = 11$, also $y = 3$. Damit liefert Gl. (I) sofort: $2 + 3 - z = 1$, deswegen ist $z = 4$.

Man löse die folgenden linearen Gleichungssysteme:

$$a)\ \begin{array}{rrrl} 2x & +y & +3z & = 3 \\ -x & -y & +2z & = 3 \\ x & +2y & +5z & = 2 \end{array} \qquad b)\ \begin{array}{rrrl} 7x & -y & -z & = 4 \\ x & +y & -z & = 2 \\ 2x & +y & +z & = 14 \end{array} \qquad c)\ \begin{array}{rrrl} x & +y & -z & = 0 \\ x & -y & +z & = 2 \\ x & +y & +z & = 6 \end{array}$$

Lösungen: a) $x = 1$, $y = -2$, $z = 1$; b) $x = 2$, $y = 5$, $z = 5$; c) $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$

3 Übungsaufgaben – Mengen

Gegeben sind die drei Mengen $M_1 = \{a, b, c, d, e\}$*,* $M_2 = \{e, f, g, h, i\}$ *und* $M_3 = \{a, c, e, g, i\}$*. Man bilde die Mengen* $M_1 \cap M_2$*,* $M_1 \cup M_2$*,* $M_1 \cap M_3$*,* $M_1 \cup M_3$*,* $M_2 \cap M_3$ *und* $M_2 \cup M_3$ *sowie* $M_1 \setminus M_2$*,* $M_2 \setminus M_1$*,* $M_1 \setminus M_3$*,* $M_2 \setminus M_3$*,* $\bigcap_{n=1}^3 M_n$ *und* $\bigcup_{n=1}^3 M_n$

$M_1 \cap M_2 = \{e\}$, $M_1 \cup M_2 = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$, $M_1 \cap M_3 = \{a, c, e\}$, $M_1 \cup M_3 = \{a, b, c, d, e, g, i\}$, $M_2 \cap M_3 = \{e, g, i\}$, $M_2 \cup M_3 = \{a, c, e, f, g, h, i\}$, $M_1 \setminus M_2 = \{a, b, c, d\}$, $M_2 \setminus M_1 = \{f, g, h, i\}$, $M_1 \setminus M_3 = \{b, d\}$, $M_2 \setminus M_3 = \{f, h\}$, $\bigcap_{n=1}^3 M_n = \{e\}$, $\bigcup_{n=1}^3 M_n = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$

Man beweise das Distributivgesetz $M_1 \cap (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3)$*.*

Die folgenden Beziehungen sind einander jeweils äquivalent:

$$
\begin{array}{l}
x \in M_1 \cap (M_2 \cup M_3) \\
x \in M_1 \quad \wedge \quad x \in (M_2 \cup M_3) \\
x \in M_1 \quad \wedge \quad (x \in M_2 \quad \vee \quad x \in M_3) \\
\qquad \text{und wegen } A \wedge (B \vee C) \iff (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \\
(x \in M_1 \quad \wedge \quad x \in M_2) \quad \vee \quad (x \in M_1 \quad \wedge \quad x \in M_3) \\
x \in M_1 \cap M_2 \quad \vee \quad x \in M_1 \cup M_3 \\
x \in (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cup M_3)
\end{array}
$$

Die oben verwendete aussagenlogische Äquivalenz läßt sich leicht mit Hilfe einer Wahrheitstafel zeigen. Analog zu diesem Beispiel lassen sich mengentheoretische Aussagen generell auf aussagenlogische zurückführen.

Beweisen Sie die Absorptionsgesetze $M_1 \cap (M_1 \cup M_2) = M_1$ *und* $M_1 \cup (M_1 \cap M_2) = M_1$*!*

Das Element x_1 sei in M_1 enthalten. Dann ist natürlich auch $x_1 \in M_1 \cup M_2$ und daher weiter $x_1 \in M_1 \cap (M_1 \cup M_2)$. x_2 sei nicht in M_1 enthalten. Dann kann es zwar Element von $M_1 \cup M_2$ sein (wenn es Element von M_2 ist), aber sicher nicht Element von $M_1 \cap (M_1 \cup M_2)$. Das heißt, alle Elemente von M_1 und nur diese sind auch Elemente von $M_1 \cap (M_1 \cup M_2)$, also ist tatsächlich $M_1 \cap (M_1 \cup M_2) = M_1$. Der Beweis von $M_1 \cup (M_1 \cap M_2) = M_1$ verläuft völlig analog.

Beweisen Sie die Regeln von de Morgan!

Wir beweisen hier nur die erste Regel, die Vorgehensweise für die zweite ist vollkommen analog:

$$
\begin{array}{rl}
 & x \in C_X\left(\bigcup M\right) \\
\iff & x \in X \quad \text{und} \quad x \notin \bigcup M \\
\iff & x \in X \quad \text{und} \quad x \notin M \ \forall\, M \in F \\
\iff & x \in C_X(M) \ \forall\, M \in F \\
\iff & x \in \bigcap C_X(M)
\end{array}
$$

Da diese Äquivalenz für jedes Element in $C_X(\bigcup M)$ und ebenso jedes in $\bigcap C_X(M)$ gilt, müssen die beiden Mengen identisch sein.

4 Übungsaufgaben – vollständige Induktion

Man beweise durch vollständige Induktion: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2 < \frac{n^3}{3}$ *für alle natürlichen* n.

$n=1$: $0 < \frac{1}{3}$ ist offensichtlich richtig

$n \to n+1$: $$\sum_{k=1}^{n+1}(k-1)^2 = \sum_{k=1}^{n}(k-1)^2 + n^2 \overset{\text{laut Induktionsannahme}}{<}$$
$$< \frac{n^3}{3} + n^2 = \frac{n^3+3n^2}{3} < \frac{n^3+3n^2+3n+1}{3} = \frac{(n+1)^3}{3}$$

Man beweise für natürliche Zahlen $n \geq 2$: $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{2}{k\,(k+1)}\right) = \frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{n}\right)$

$n=2$: $1-\dfrac{2}{2\cdot(2+1)} = \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}\left(1+\dfrac{2}{2}\right)$ stimmt.

$n \to n+1$: $$\prod_{k=2}^{n+1}\left(1-\frac{2}{k\,(k+1)}\right) = \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{2}{k\,(k+1)}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{(n+1)\,(n+2)}\right) \overset{\text{lt. Ind.}-\text{Ann.}}{=}$$
$$= \frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdot\frac{(n+1)\,(n+2)-2}{(n+1)\,(n+2)} = \frac{1}{3}\cdot\frac{n+2}{n}\cdot\frac{n\,(n+3)}{(n+1)\,(n+2)} =$$
$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{n+3}{n+1} = \frac{1}{3}\cdot\frac{n+1+2}{n+1} = \frac{1}{3}\cdot\left(1+\frac{2}{n+1}\right),$$ was zu beweisen war.

Man zeige für $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(n+k)\,(n-k) = \frac{n\,(n+1)\,(4n-1)}{6}$

$n=1$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{0}(1+k)\,(1-k) = 1 = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{6}$ stimmt.

$n-1 \to n$: $$\sum_{k=0}^{n}(n+1+k)\,(n+1-k) = \sum_{k=0}^{n-1}(n+1+k)\,(n+1-k) + (2n+1) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1}\left((n+k)\,(n-k)+(2n+1)\right)+(2n+1) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1}(n+k)\,(n-k) + \sum_{k=0}^{n-1}(2n+1) + (2n+1) \overset{\text{laut Induktionsannahme}}{=}$$
$$= \frac{n\,(n+1)\,(4n-1)}{6} + n\,(2n+1) + (2n+1) = \frac{n\,(n+1)\,(4n-1)}{6} + \frac{6\,(n+1)\,(2n+1)}{6} =$$
$$= \frac{(n+1)\,(4n^2-n+12n+6)}{6} = \frac{(n+1)\,(4n^2+8n+3n+6)}{6} =$$
$$= \frac{(n+1)\,(n+2)\,(4n+3)}{6},$$ womit die Behauptung bewiesen ist.

Man beweise, dass 5^n-1 *durch* 4 *teilbar ist.*

$n=1$: $5-1=4$ ist natürlich durch 4 teilbar.

$n \to n+1$: $5^{n+1}-1 = 5\cdot 5^n - 1 = \underbrace{4\cdot 5^n}_{\text{durch 4 tb.}} + \underbrace{5^n-1}_{\text{tb. lt. Ann.}}$ ist ebenfalls durch 4 teilbar.

Man beweise induktiv die beiden Summenformeln a) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2}$ *und b)* $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

a) $n = 1$: $\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1\,(1+1)}{2}$ stimmt.

$n \to n+1$: $\sum_{k=1}^{n+1} = \sum_{k=1}^{n} + (n+1) \overset{\text{nach Annahme}}{=} \frac{n\,(n+1)}{2} + (n+1) =$

$= \frac{n\,(n+1)}{2} + \frac{2\,(n+1)}{2} = \frac{(n+1)\,(n+2)}{2}$.

b) $n = 0$: $\sum_{k=0}^{0} q^k = 1 = \frac{1-q}{1-q}$ stimmt.

$n \to n+1$: $\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k + q^{n+1} \overset{\text{nach Annahme}}{=} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} =$

$= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + \frac{q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$.

Man beweise $\prod_{k=1}^{n}(1+x_k) \geq 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n$*, wenn alle* $x_k \in (-1,0)$ *oder alle* $x_k > 0$ *sind und leite daraus die Bernoulli-Ungleichung* $(1+a)^n \geq 1 + n\,a$ *für* $a > -1$ *ab.*

$n = 1$: $1 + x_k \geq 1 + x_k$ ist eine wahre Aussage.

$n \to n+1$: Unter den Voraussetzungen für x_k ist $x_j\,x_k > 0$ und $1 + x_k > 0$.

$\prod_{k=1}^{n+1}(1+x_k) = (1+x_{n+1}) \cdot \prod_{k=1}^{n}(1+x_k) \overset{\text{lt. Ann.}}{\geq} (1+x_{n+1}) \cdot (1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n) =$

$= 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n + x_{n+1} + x_{n+1}x_1 + \ldots x_{n+1}x_n > 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_{n+1}$.

Für die Wahl $x_1 = \ldots = x_n = a$ erhält man sofort die Bernoulli-Ungleichung für $a \in (-1,0)$ oder $a > 0$, für den Fall $a = 0$ erhält man trivialerweise $1^n \geq 1 + n \cdot 0$. Schließt man den Fall $a = 0$ aus, so erhält man für $n \geq 2$ statt des „$\geq$" ein echt „$>$".

Man beweise für alle $n \in \mathbb{N}$ *die Formel* $\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k = 2 + 2^{n+1}(n-1)$.

$n = 1$: $1 \cdot 2 = 2 + 2 \cdot 0$ stimmt natürlich.

$n \to n+1$: $\sum_{k=1}^{n+1} k \cdot 2^k = \sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k + (n+1) \cdot 2^{n+1} \overset{\text{laut Induktionsannahme}}{=}$

$= 2 + 2^{n+1} \cdot (n-1) + (n+1) \cdot 2^{n+1} = 2 + 2^{n+1} \cdot (n - 1 + n + 1) =$

$= 2 + 2^{n+1} \cdot 2n = 2 + 2^{n+2}\,n$.

Scheitert der Beweis von „$2n+1$ *ist gerade für alle* $n \geq 100$ *am Induktionsanfang, am Induktionsschritt oder an beidem?*

201 ist ungerade, womit der Induktionsanfang nicht gegeben ist, der Induktionsschritt hingegen läßt sich vollziehen: $2\,(n+1) + 1 = \underbrace{2n+1}_{\text{gerade nach Annahme}} + 2$ wäre gerade.

5 Konvergenzkriterien für Folgen

Arbeitet man mit der direkten Definition von Grenzwert und Konvergenz, so erweist sich die Überprüfung bei komplizierteren Folgen oft als recht aufwendig oder unpraktisch. Zudem muss man dazu den Grenzwert ja schon kennen. Im Folgenden werden daher noch drei Kriterien vorgestellt, mit deren Hilfe man die Konvergenz von Folgen manchmal auf leichtere Weise überprüfen kann:

- **Hauptsatz über monotone Zahlenfolgen**: *Eine nach oben beschränkte monoton wachsende Folge ist konvergent, ebenso eine nach unten beschränkte monoton fallende.*
  Das ist unmittelbar einsichtig, wenn eine Folge immer wächst, einen gewissen Wert aber nicht überschreiten kann, muss sie ja wohl einen Grenzwert haben, und analog für das Fallen.

- **Cauchy-Kriterium**: *Wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl N gibt, so dass $|a_n - a_m| < \varepsilon$ für alle $n, m > N$ ist (Cauchy-Folge), dann ist die **reelle** Zahlenfolge $\{a_n\}$ konvergent.*
  Man beachte, dass (im Gegensatz zur „normalen" Konvergenz) im Cauchy-Kriterium der Grenzwert A überhaupt nicht vorkommt („inneres Kriterium"), man kann also die Konvergenz überprüfen, ohne den Grenzwert überhaupt zu kennen. Allerdings ist das Cauchy-Kriterium rechnerisch meist schwierig zu handhaben. Außerdem ist zu beachten, dass dieses Kriterium etwa für Folgen in den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ nicht anwendbar ist, da $\mathbb{Q}$ nicht vollständig ist (dazu mehr in **??**).

- **Sandwich-Kriterium**: *Wenn $a_n \leq b_n \leq c_n$ für alle bis auf endlich viele n und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n =: A$ ist, so folgt daraus: Auch $\{b_n\}$ ist konvergent und hat den Grenzwert A.*
  Zum Beispiel hat die Folge $\{b_n\}$ mit $b_n = 1 + \frac{\sin n}{n}$ den Grenzwert Eins, weil wegen $|\sin n| \leq 1$ immer gilt $a_n := 1 - \frac{1}{n} \leq 1 + \frac{\sin n}{n} \leq 1 + \frac{1}{n} =: c_n$ und weil ja $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = 1$ ist.

Kompliziertere Grenzwerte können mittels Umformungen in einfachere aufgespalten werden. Dabei ist aber zu beachten, dass das nur zulässig ist, wenn alle so entstehenden Einzelgrenzwerte auch tatsächlich existieren und insgesamt keine unbestimmte Form (wie etwa $\frac{0}{0}$) erhalten wird:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})}{\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})} = \frac{1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}} = 1 \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \neq \left(1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)^{\lim\limits_{n\to\infty} n}$$

Zur effektiven Berechnung von Grenzwerten ist es gut, die folgenden Limiten zu kennen:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1, \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1, \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!} = \infty, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!} = 0, \quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2,71828$$

Außerdem ist $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha} = 0$ für jedes $\alpha > 0$. Das kann man bei der Berechnung der Grenzwerte von Folgen ausnutzen, deren Glieder rationale Funktionen in n sind, die also die Form $a_n = \frac{C_p n^p + C_{n-1} n^{p-1} + \ldots + C_1 n + C_0}{D_r n^r + D_{r-1} n^{r-1} + \ldots + D_1 n + D_0}$ haben. Man dividiert Zähler und Nenner durch die höchste irgendwo vorkommende Potenz $n^{\max(p,r)}$. Wegen $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha} = 0$ spielen nun nur mehr die Koeffizienten dieser Potenz eine Rolle.

Bsp: Wir erhalten $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2 - 7n + 2}{2n^2 + n + 11} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4 - \frac{7}{n} + \frac{2}{n^2}}{2 + \frac{1}{n} + \frac{11}{n^2}} = \dfrac{4 - 0 + 0}{2 + 0 + 0} = 2$

6 Übungsaufgaben – Folgen

Man berechne den Grenzwert der Folge $a_n = n - n \cdot \sqrt{1+\frac{1}{n}}$.

$$a_n = n \cdot \left(1 - \sqrt{1+\tfrac{1}{n}}\right) = \frac{n \cdot \left(1-\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right) \cdot \left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \frac{n\cdot\left(1-(1+\frac{1}{n}\right)}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \frac{n\cdot\left(-\frac{1}{n}\right)}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = -\frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}$$

Damit erhält man problemlos $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \dfrac{-1}{1+\sqrt{1+0}} = -\dfrac{1}{2}$

Man berechne den Grenzwert der Folge $a_n = \dfrac{\sqrt{4n(n-2)} - \sqrt{2n(n-1)}}{\sqrt{3n(n+3)}}$.

$$a_n = \frac{\sqrt{4n(n-2)} - \sqrt{2n(n-1)}}{\sqrt{3n(n+3)}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{1}{n^2}}}{\sqrt{\frac{1}{n^2}}} = \frac{\sqrt{4(1-\frac{2}{n})} - \sqrt{2(1-\frac{1}{n})}}{\sqrt{3(1+\frac{3}{n})}}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4(1-\frac{2}{n})} - \sqrt{2(1-\frac{1}{n})}}{\sqrt{3(1+\frac{3}{n})}} = \frac{\sqrt{4(1-0)} - \sqrt{2(1-0)}}{\sqrt{3(1+0)}} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

Man untersuche die Folgen $a_n = (-1)^n \sqrt{n}\,\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$ *und* $b_n = \dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n+2} - \dfrac{n}{2}$ *auf Konvergenz und berechne gegebenenfalls die Grenzwerte.*

$$a_n = (-1)^n \sqrt{n} \frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = (-1)^n \sqrt{n} \frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

Nun ist $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \dfrac{1}{2}$; wegen des $(-1)^n$ ist $\{a_n\}$ also divergent.

$$b_n = \frac{\sum_{k=1}^n k}{n+2} - \frac{n}{2} = \frac{n\,(n+1)/2}{n+2} - \frac{n}{2} = \frac{n\,(n+1)}{2(n+2)} - \frac{n(n+2)}{2(n+2)} = \frac{n^2+n-n^2-2n}{2(n+2)} = -\frac{n}{2n+4}$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{n}{2n+4}\cdot\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2+\frac{4}{n}}\right) = -\frac{1}{2+0} = \frac{1}{2}$$

Man berechne den Grenzwert der Folge $a_n = \dfrac{2+4+6+\ldots+2n}{1+3+5+\ldots+(2n-1)}$.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2(1+2+\ldots+n)}{1+2+\ldots+(2n-1)) - 2(1+2+\ldots+(n-1))} = \frac{2\frac{n\,(n+1)}{2}}{\frac{(2n-1)\,2n}{2} - 2\,\frac{(n-1)\,n}{2}} = \\ &= \frac{n\,(n+1)}{n(2n-1)-(n-1)n} = \frac{n+1}{2n-1-n+1} = \frac{n+1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \end{aligned}$$

Man berechne den Grenzwert der Folge $a_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n}$.

$$a_n = \frac{(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n})(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n})}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}} = \frac{n^2+n-(n^2-n)}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}} = \frac{2n}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}} = \frac{2}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}} = 1$$

Man zeige, dass mit $[a_n, b_n]$*, wobei* $a_n = \frac{1}{(n+1)^2}\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)$ *und* $b_n = \frac{1}{(n+1)^2}\sum_{k=1}^{n+1} k$ *ist, eine Intervallschachtelung vorliegt. Welche reelle Zahl wird dadurch definiert?*

$$a_n = \frac{1}{(n+1)^2}\sum_{\ell=1}^{n}\ell = \frac{1}{(n+1)^2}\cdot\left(\frac{n}{2}(n+1)\right) = \frac{n\,(n+1)}{2(n+1)^2} = \frac{n}{2(n+1)}$$

$$b_n = \frac{1}{(n+1)^2}\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{1}{(n+1)^2}\left(\frac{n+1}{2}(n+2)\right) = \frac{(n+1)\,(n+2)}{2(n+1)^2} = \frac{n+2}{2(n+1)}$$

Man erkennt schon $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{2}$. Mit diesem Wissen kann man versuchen, die Folgenglieder noch etwas umzuformen:

$$a_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{n}{2(n+1)} = \frac{1}{2} - \frac{n+1}{2(n+1)} + \frac{n}{2(n+1)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(n+1)} \quad \text{wächst streng monoton}$$

$$b_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{n+2}{2(n+1)} = \frac{1}{2} - \frac{n+1}{2(n+1)} + \frac{n+2}{2(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2(n+1)} \quad \text{fällt streng monoton}$$

Für die Differenz der beiden Folgen gilt: $b_n - a_n = \frac{1}{n+1} \to 0$. Da beiden Folgen den gleichen Grenzwert haben, die eine monoton wächst, die andere monoton fällt, liegt eine Intervallschachtelung vor, sie definiert die Zahl $\frac{1}{2}$.

Gegeben ist $a_n = \left(\frac{2n}{3n+1}\right)^{(-1)^n} + \frac{(-1)^n\,n}{2(n+1)} - \frac{1}{2}$. *Man bestimme* $\limsup_{n\to\infty} a_n$ *und* $\liminf_{n\to\infty} a_n$.

Bei Ausdrücken, in denen $(-1)^n$ vorkommt, bieten sich meist Fallunterscheidungen an:

gerade:	$n = 2k$	$a_{2k} = \frac{4k}{6k+1} + \frac{2k}{4k+2} - \frac{1}{2} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{4}{6} + \frac{2}{4} - \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$
ungerade:	$n = 2k+1$	$a_{2k+1} = \left(\frac{4k+2}{6k+4}\right)^{-1} - \frac{2k+1}{4k+4} - \frac{1}{2} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{6}{4} - \frac{2}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Demnach ist $\limsup_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{3}$ und $\liminf_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$.

Man zeige, daß die Folge $a_n = \frac{(n+a)^n\,a^n}{n^n\cdot n!}$ *für jede reelle Zahl* a *konvergiert und bestimme den Grenzwert.*

Wir wissen $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+a)^n}{n^n}\cdot\frac{a^n}{n!}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+a}{n}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}$.

Nun kennt man bereits (oder sollte zumindest kennen) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+a}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a$.

Weiters ist $\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!} = 0$ – das sieht man am einfachsten, indem man ein allgemeines Folgenglied explizit anschreibt: $\frac{a^n}{n!} = \frac{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}$. Sowohl im Zähler als auch im Nenner steht ein Produkt von n Faktoren, aber während diese über dem Bruchstrich den immer den Wert a haben, werden sie darunter mit wachsendem n immer größer, und für $n\to\infty$ geht der Ausdruck gegen Null. Beide Grenzwerte existieren, damit ist der Grenzwert des Produkts gleich dem Produkt der Grenzwerte, und man erhält $\lim_{n\to\infty} a_n = e^a\cdot 0 = 0$.

$\{a_n\}$ ist definiert durch $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$. Man beweise: $\left(\frac{3}{2}\right)^n \le a_n \le 2^n$

Induktiv: $n = 0$: $\left(\frac{3}{2}\right)^0 = 1 \le 1 \le 1 = 2^0$ stimmt; $n = 1$: $\left(\frac{3}{2}\right)^1 = \frac{3}{2} \le 2 \le 2 = 2^1$ stimmt ebenfalls.

$(n, n+1) \to n+2 \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \ge \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{3}{2}\right)^n = \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n > \frac{9}{4} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n+2}$

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \le 2^{n+1} + 2^n = 3 \cdot 2^n < 4 \cdot 2^n = 2^{n+2}$$

Man untersuche $a_{n+1} = 1 + \sqrt{1 + a_n}$, $a_1 = 0$ auf Konvergenz und bestimme ggf. den Limes.

Ausrechnen: $\{a_n\} = \{0, 2, 2.73, 2.93, \ldots\}$

Vermutung: $\{a_n\}$ ist monoton wachsend und $a_n \le 3$

Monotonie: $a_{n+2} - a_{n+1} = \sqrt{1 + a_{n+1}} - \sqrt{1 + a_n}$; wenn $a_{n+1} > a_n$ ist, muss demnach auch $a_{n+2} > a_{n+1}$ sein. Weil $a_2 = 2 > 0 = a_1$ ist, wächst die Folge monoton.

Schranke: $a_1 < 3$. Induktionsannahme: $a_n < 3$, daraus folgt $a_{n+1} < 1 + \sqrt{1+3} = 3$, die Folge ist nach oben beschränkt und wegen der Monotonie konvergent.

Grenzwert: $a = 1 + \sqrt{1 + a}$ bzw. $a - 1 = \sqrt{1 + a}$ und nach Quadrieren $a^2 - 2a + 1 = 1 + a$ bzw. $a^2 - 3a = a(a - 3) = 0$. Von den beiden Lösungen $a = 0$ und $a = 3$ kommt nur die zweite in Frage: $\lim_{n\to\infty} a_n = 3$.

Man untersuche $a_{n+1} = a_n^2 + a_n$, $a_1 = \frac{1}{4}$ auf Konvergenz und bestimme ggf. den Grenzwert.

Aus $a_{n+1} = a_n^2 + a_n$ und $a_1 > 0$ folgt weiter $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen $a_{n+1} - a_n = a_n^2 + a_n - a_n = a_n^2$ ist die Folge streng monoton wachsend und durch $a_1 = \frac{1}{4}$ nach unten beschränkt. $a_{n+1} = a_n \cdot (a_n + 1) \ge a_n \cdot \frac{5}{4} \ge a_{n-1} \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^2 \ge \ldots \ge a_1 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^n$ wächst über jede Schranke. Demnach ist $\{a_n\}$ nach oben unbeschränkt, also divergent.
Alternativer Nachweis der Divergenz: Der formale Grenzübergang $n \to \infty$ liefert die implizite Gleichung $a = a^2 + a$ mit der einzigen Lösung $a = 0$. Dies steht aber im Widerspruch zum monotonen Wachsen einer Folge mit positiven Gliedern, $\{a_n\}$ kann deshalb nicht konvergent sein.

Man untersuche $a_{n+1} = \frac{C + a_n}{2}$, $a_1 = 0$, $C > 0$ auf Konvergenz und bestimme ggf. den Grenzwert.

Die ersten Glieder der Folge sind $\{a_n\} = \{0, \frac{C}{2}, \frac{3C}{4}, \frac{7C}{8}, \ldots\}$, man kann also monotones Wachsen und Beschränktheit nach oben vermuten. Für die Monotonie erhält man $a_{n+1} - a_n = \frac{C}{2} + \frac{a_n}{2} - a_n = \frac{C - a_n}{2}$. Solange also $a_n < C$ ist, ist $a_{n+1} > a_n$. Nun zeigt man Beschränktheit nach oben durch C (und damit auf einen Schlag auch die Monotonie) ganz einfach mittels Induktion. Ist $a_n < C$, so ist $a_{n+1} = \frac{C + a_n}{2} < \frac{C + C}{2} = C$. Die Folge ist also konvergent und man erhält für den Grenzwert $A = \lim_{n\to\infty} a_n$ (wenig überraschend) $A = \frac{A + C}{2}$, also $A = C$.

Gegeben ist die Folge $a_{n+1} = 2a_n - 1$ mit $a_1 = a \in \mathbb{R}$. Man bestimme ein explizites Bildungsgesetz für die Folgenglieder und untersuche, für welche $a \in \mathbb{R}$ die Folge konvergiert.

Eine Berechnung der ersten Glieder zeigt: $a_1 = a$, $a_2 = 2a - 1$, $a_3 = 2(2a - 1) - 1 = 4(a - 1) + 1$; $a_4 = 2(4(a - 1) + 1) - 1 = 8(a - 1) + 1$. Man kann vermuten: $a_n = 2^{n-1}(a - 1) + 1$, was allerdings noch mittels vollständiger Induktion bewiesen werden sollte:
$a_{n+1} = 2a_n - 1 \stackrel{\text{Ann}}{=} 2(2^{n-1}(a - 1) + 1) - 1 = 2^n(a - 1) + 2 - 1 = 2^n(a - 1) + 1$
Der Induktionsanfang ist bereits gemacht, demnach stimmt die Rekursionsformel. Man erkennt auch sofort, daß die Folge divergiert, wenn nicht gerade $a = 1$ ist (der Ausdruck wächst für $a > 1$ über und fällt für $a < 1$ unter jede Schranke). Die Folge ist also nur konvergent für $a = 1$.

7 Konvergenzkriterien für Reihen

Um die Konvergenz einer gegebene Reihe zu überprüfen, stehen diverse Kriterien zur Verfügung, von denen hier die wichtigsten vorgestellt werden sollen. Die meisten davon haben durchaus einschneidende Voraussetzungen (z.B. dass alle $a_n \geq 0$ sind und monoton fallen); diese werden beim jeweiligen Kriterium explizit angegeben.

7.1 Quotientenkriterium

Hier betrachtet man den Grenzwert zweier aufeinanderfolgender Glieder der Reihe und kann feststellen:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \begin{cases} < 1 & \text{Konvergenz} \\ = 1 & \text{keine Aussage} \\ > 1 & \text{Divergenz} \end{cases}$$

Wenn der Grenzwert nicht existiert, können immer noch limes superior und limes inferior eine Aussage bringen. Wenn sogar $\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ ist, liegt ebenfalls Konvergenz vor, ist dagegen bereits $\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, hat man divergentes Verhalten.

Bsp: Man untersuche die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ auf Konvergenz. Dazu bilden wir mit $a_n := \frac{2^n}{n!}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \left(\frac{2^n}{n!}\right)^{-1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \frac{2 \cdot 2^n}{(n+1) \cdot n!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1} \to 0 < 1,$$

die Reihe konvergiert demnach.

7.2 Wurzelkriterium

Mit dem Quotientenkriterium verwandt ist das Wurzelkriterium, in dem man die n-te Wurzel des Betrags von a_n im Limes $n \to \infty$ betrachtet. Auch hier gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} < 1 & \text{Konvergenz} \\ = 1 & \text{keine Aussage} \\ > 1 & \text{Divergenz} \end{cases}$$

Sollte der Limes nicht existieren, genügt es in diesem Fall, $\limsup \sqrt[n]{|a_n|}$ zu untersuchen, auch dann zeigt ein Wert < 1 Konvergenz und einer > 1 Divergenz an; im Falle $= 1$ kann auch hier keine Aussage getroffen werden.

Anm: Das Wurzelkriterium ist insofern „stärker“ als das Quotientenkriterium, als dass auch für Fälle, in denen das Quotientenkriterium keine Entscheidung bringt, noch manchmal Aussagen erlaubt. (Das gilt allerdings nur dann, wenn der Grenzwert von $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ nicht existiert und auch $\limsup$ und $\liminf$ nicht weiterhelfen. Für $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$, liefert auch das Wurzelkriterium $\sqrt[n]{|a_n|} \to 1$ und damit keine Entscheidung.) Versagt hingegen das Wurzelkriterium, so bringt auch das Quotientenkriterium sicher keine Aussage.

Bsp: Man untersuche die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ auf Konvergenz:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \to \frac{1}{e} < 1,$$

die Reihe ist konvergent.

7.3 Vergleichskriterium

Das Vergleichskriterium versucht, die Konvergenz/Divergenz einer gegebenen Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ anhand einer anderen Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ zu überprüfen, deren Konvergenzverhalten bereits bekannt ist. Üblicherweise wird es in einer der drei folgenden Arten verwendet (wir betrachten dabei nur Reihen mit positiven Gliedern a_n):

- Wenn $a_n \leq b_n$ für fast alle n ist, und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergiert, dann konvergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ (*Majorantenkriterium*, die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ heißt dann eine konvergente Majorante).
- Wenn $a_n \geq b_n$ für fast alle n ist, und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ divergiert, dann divergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ (*Minorantenkriterium*, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ heißt analog zu oben eine divergente Minorante).
- Wenn $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = C \in \mathbb{R}^+$ ist, dann haben die beiden Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ das gleiche Konvergenzverhalten. Ansonsten gilt immerhin noch:
  - Wenn $\frac{a_n}{b_n} \to 0$, und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergiert, dann konvergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.
  - Wenn $\frac{a_n}{b_n} \to \infty$, und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ divergiert, dann divergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Natürlich ist das Vergleichskriterium nur so gut wie die Reihen, die zum Vergleich zur Verfügung stehen. Insbesondere praktisch sind in dieser Hinsicht die schon von vorhin bekannten Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \dots \begin{cases} \text{konv. f. } |q| < 1 \\ \text{div. f. } |q| \geq 1 \end{cases} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \dots \begin{cases} \text{konv. f. } \alpha > 1 \\ \text{div. f. } \alpha \leq 1 \end{cases} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (\ln n)^\alpha} \dots \begin{cases} \text{konv. f. } \alpha > 1 \\ \text{div. f. } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Bsp: Man untersuche die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-7n+1}{4n^4+3n^3+2n^2+n}$ auf Konvergenz.

Die höchste Potenz im Zähler ist n^2, die höchste im Nenner n^4; man kann also vermuten, dass sich die Reihe ein analoges Verhalten haben wird wie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, also Konvergenz vorliegt. Das gilt es nun noch zu beweisen. Mit $a_n := \frac{n^2-7n+1}{4n^4+3n^3+2n^2+n}$ und $b_n := \frac{1}{n^2}$ erhält man:

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^2-7n+1}{4n^4+3n^3+2n^2+n} \cdot \frac{n^2}{1} = \frac{n^4-7n^3+n^2}{4n^4+3n^3+2n^2+n} = \frac{1-\frac{7}{n}+\frac{1}{n^2}}{4+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}} \to \frac{1}{4} \in \mathbb{R}^+$$

Die beiden Folgen haben also gleiches Konvergenzverhalten, und wie erwartet konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-7n+1}{4n^4+3n^3+2n^2+n}$ tatsächlich.

7.4 Leibniz-Kriterium

Nun betrachten wir Reihen der Form $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ mit $a_n \geq 0$, also Gliedern mit jeweils wechselndem Vorzeichen. Hier gilt:
Wenn a_n monoton fallend ist und $a_n \to 0$ geht, dann ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergent.

Bsp: Man untersuche die alternierende harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ auf Konvergenz:

Diese Reihe hat auf jeden Fall die richtige Form mit wechselndem Vorzeichen und $a_n = \frac{1}{n} \geq 0$, auch dass $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ist, ist klar. Was also noch zu überprüfen bleibt ist die Monotonie:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n}{n\,(n+1)} - \frac{n+1}{n\,(n+1)} = -\frac{1}{n\,(n+1)} < 0$$

Die alternierende harmonische Reihe ist also wie früher schon behauptet tatsächlich konvergent.

7.5 Verdichtungskriterium

Im Falle, dass in der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ die Glieder a_n alle positiv sind und monton fallen, wird die Konvergenz einer Reihe schon von einer sehr viel „dünneren“ Teilreihe bestimmt. Es gilt dabei der Cauchy'sche Verdichtungssatz:

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergiert genau dann, wenn die „verdichtete“ Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ *konvergiert.*

Der Beweis lehnt sich eng an jenen für die Divergenz der harmonischen Reihe an: Unter den gemachten Vorausetzungen (a_n positiv und monton fallend) gilt nämlich:

$$\underbrace{a_{2^n} + a_{2^n} + \ldots + a_{2^n}}_{2^n a_{2^n}} \geq \underbrace{a_{2^n+1} + a_{2^n+2} + \ldots + a_{2^{n+1}}}_{\sum\limits_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} a_k} \geq \underbrace{a_{2^{n+1}} + a_{2^{n+1}} + \ldots + a_{2^{n+1}}}_{2^n a_{2^{n+1}}}$$

und nachdem einerseits $2^n a_{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \cdot 2^{n+1} a_{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \cdot 2^m a_{2^m}$ ist, andererseits konstante Vorfaktoren nicht das Geringste an der Konvergenz einer Reihe ändern, hat die ursprüngliche Reihe zwangsläufig das selbe Konvergenzverhalten wie jene über $2^n a_{2^n}$.

7.6 Cauchy-Kriterium

Im Gegensatz zu allen bisher angegebenen Kriterien setzt das Cauchy-Kriterium keine spezielle Gestalt der a_n voraus und ist damit das allgemeinste Kriterium – allerdings ist es auch technisch am anspruchsvollsten, und man wird es nur dann verwenden, wenn die anderen Kriterien alle nicht anwendbar sind oder versagen. Auf Reihen umgelegt lautet seine Formulierung:

> *Eine Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *ist genau dann konvergent, wenn es zu jedem* $\varepsilon > 0$
> *ein* $N \in \mathbb{N}$ *gibt, so dass* $\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| < \varepsilon$ *für beliebige* $m > n > N$ *ist.*

Analog zum letzten Abschnitt gilt auch hier das Kriterium nur dann, wenn man es mit reellen (oder komplexen) Zahlen zu tun, aber nicht notwenigerweise in einem „unvollständigen“ Zahlbereich wie etwa $\mathbb{Q}$.

EXKURS: **Weitere Konvergenzkriterien für Reihen**

Neben den hier vorgestellten Konvergenzkriterien gibt es noch eine ganze Reihe anderer, die entweder auf Mittel zurückgreifen, die erst später in diesem Skriptum folgen (Integralkriterium) oder allgemein technisch anspruchsvoller sind (Kriterien von Kummer und Raabe). Der Vollständigkeit halber seien sie an dieser Stelle trotzdem kurz angeführt:

- *Integralkriterium*: Eine Reihe $\sum_{n=n_0}^{\infty} f(n)$ mit monoton fallendem $f(n)$ ist genau dann konvergent, wenn $\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,dx$ existiert. (Das Integral braucht nur an der oberen Grenze ausgewertet zu werden.) Das kann man sich anhand einer graphischen Darstellung unmittelbar veranschaulichen:
- *Kriterium von Kummer*:
- *Kriterium von Raabe*:

8 Übungsaufgaben – Reihen

Der Erwartungswert einer Größe ist die Summe aller möglichen Werte gewichtet mit jeweils der Wahrscheinlichkeit für ihr Eintreten. So ist der Erwartungswert eines (fairen) n-seitigen Würfels

$$\langle W_n \rangle = \frac{1}{n}\,(1+2+\ldots+n) = \frac{1}{n}\,\frac{n\,(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$$

Berechnen Sie, wie sich dieser Wert durch die Zusatzregel ändert, dass beim Würfeln der höchsten Zahl n jeweils weitergewürfelt und das Ergebnis immer zum bisherigen addiert wird.

Aus dem Erwartungswert $\frac{1}{n}\,(1+2+\ldots+n)$ wird nun

$$\langle W_n^+ \rangle = \frac{1}{n}\left(1+\ldots+n+\frac{1}{n}\left(1+\ldots+n+\frac{1}{n}(\ldots)\right)\right)$$

Aus der Summe ist eine unendliche Reihe geworden, die man mit $N = 1+\ldots+n = \frac{n\,(n+1)}{2}$ einfacher schreiben kann als:

$$\begin{aligned}\langle W_n^+ \rangle &= \frac{1}{n}N + \frac{1}{n^2}N + \frac{1}{n^3}N + \ldots = N \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} = N \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n^k} - 1\right) = N \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{1}{n}} - 1\right) = \\ &= N \cdot \left(\frac{n}{n-1} - 1\right) = N \cdot \frac{1}{n-1} = \frac{n\,(n+1)}{2} \cdot \frac{1}{n-1} = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n+1}{2}\end{aligned}$$

Der Erwartungswert erhöht sich also um einen Faktor $\frac{n}{n-1}$.

Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz:
a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^{n-1}}$, *b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+n^2}$, *c)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} 2^{-3n-1}$

a) $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\dfrac{2+(-1)^n}{2^{n-1}}} = \dfrac{\sqrt[n]{2+(-1)^n}}{2^{\frac{n-1}{n}}} \to \dfrac{1}{2}$, die Reihe ist konvergent nach Wurzelkriterium

b) Abschätzung $a_n = \dfrac{1}{n+n^2} \leq \dfrac{1}{n^2}$. Da die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergent ist, ist auch diese Reihe konvergent (Majorantenkriterium).

c) Es ist $a_n = \dbinom{2n}{n} 2^{-3n-1} = \dfrac{(2n)!}{n!\,n!} 2^{-3n-1}$ und damit gilt $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{(2n+2)!\,2^{-3n-4}}{(n+1)!\,(n+1)!} \cdot \dfrac{n!\,n!}{(2n)!\,2^{-3n-1}} = \dfrac{(2n+2)\,(2n+1)\,2^{-3}}{(n+1)\,(n+1)} = \dfrac{2\,(n+1)\,(2n+1)}{2^3\,(n+1)\,(n+1)} \to \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} < 1$, die Reihe ist also konvergent.

Man untersuche die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+3)}{n\,!}$ *auf Konvergenz.*

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n+3)\,(2n+5)\cdot n\,!}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n+3)\cdot(n+1)\,!} = \frac{(2n+5)\cdot n\,!}{(n+1)\cdot n\,!} = \frac{2n+5}{n+1} \to 2 > 1, \text{ divergent}$$

Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin\sqrt{n}}{n^{5/2}}$, *b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^3}$, *c)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln\sqrt{n}}{n^{5/4}}$

a) $\displaystyle\left|(-1)^n\frac{\sin\sqrt{n}}{n^{5/2}}\right|\le\frac{1}{n^{5/2}}$, die Reihe konvergiert, da auch $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{5/2}}$ konvergiert.

b) $\displaystyle\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{3^{n+1}/(n+1)^3}{3^n/n^3}=\frac{3^{n+1}\cdot n^3}{3^n\cdot(n+1)^3}=3\cdot\frac{n^3}{n^3+3n^2+3n+1}\to 3>1$, divergent

c) Vgl. mit $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{9/8}}$: $\displaystyle\frac{a_n}{b_n}=\frac{\ln\sqrt{n}/n^{5/4}}{1/n^{9/8}}=\frac{\ln\sqrt{n}\,n^{9/8}}{n^{5/4}}=\frac{\ln(n^{1/2})}{n^{5/4-9/8}}=\frac{1}{2}\,\frac{\ln n}{n^{1/8}}\to 0$, da der Logarithmus „im Unendlichen“ langsamer wächst als jede Potenz. Also ist die Reihe c) „konvergenter“ als die bereits konvergente Vergleichsreihe.

Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot(\sqrt{n}+1)}{n^2+5n-1}$, *b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{n}\right)^n$, *c)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin^2\left(\pi\cdot\left(n+\frac{4}{n}\right)\right)$

a) Vergleich mit $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ liefert: $\displaystyle\frac{a_n}{b_n}=\frac{(n^{3/2}+n)\cdot\sqrt{n}}{n^2+5n-1}=\frac{n^2+n^{3/2}}{n^2+5n-1}=\frac{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+\frac{5}{n}-\frac{1}{n^2}}\to 1$, die Reihen haben gleiches Konvergenzverhalten und divergieren demnach beide.

b) Wurzelkriterium: $\displaystyle\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{n}\right)\to\frac{1}{1}\left(\frac{1}{3}+0\right)=\frac{1}{3}<1$, konvergent

c) $\displaystyle\sin^2\left(\pi\cdot\left(n+\frac{4}{n}\right)\right)=\sin^2\left(n\pi+\frac{4\pi}{n}\right)=\sin^2\left(\frac{4\pi}{n}\right)=\left(\frac{4\pi}{n}\right)^2\left(\sin\left(\frac{4\pi}{n}\right)\Big/\frac{4\pi}{n}\right)^2\le\frac{(4\pi)^2}{n^2}$, d.h. die Reihe ist konvergent, weil $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ konvergent ist.

Man untersuche die Reihen $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]$ *und* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\binom{4n}{3n}^{-1}$ *auf Konvergenz.*

1. Weil $\displaystyle\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ monoton wächst und $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ ist, ist $\displaystyle\left[e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]$ eine monoton fallende Nullfolge und die Reihe ist nach dem Leibniz-Kriterium konvergent.

2. Es ist $\displaystyle a_n=\binom{4n}{3n}^{-1}=\left(\frac{(4n)!}{(3n)!\,n!}\right)^{-1}=\frac{(3n)!\,n!}{(4n)!}$ und damit $\displaystyle\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{(3n+3)!\,(n+1)!}{(4n+4)!}\cdot\frac{(4n)!}{(3n)!\,n!}=\frac{(3n+3)\,(3n+2)\,(3n+1)\,(n+1)!}{(4n+4)\,(4n+3)\,(4n+2)\,(4n+1)}=\frac{27n^4+\ldots}{256n^4+\ldots}\to\frac{27}{256}<1$, konvergent.

Man bestimme alle $x\in(-\pi,\pi)$, *für die die Reihe* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\sin 2x)^n$ *konvergiert.*

$\sqrt[n]{|a_n|}=|\sin 2x|$ ist kleiner Eins außer für $2x=\pm\frac{\pi}{2},\pm\frac{3\pi}{2},\ldots\iff x=\pm\frac{\pi}{4},\pm\frac{3\pi}{4},\ldots$. In diesen Fällen erhält man die divergenten Reihen $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}1$ bzw. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$. Die Reihe konvergiert also für $x\in(-\pi,\pi)\setminus\{-\frac{3\pi}{4},-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\}$.

9 Übungsaufgaben – Stetigkeit

Gegeben sind die beiden Funktionen f und g:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5 & -3 \leq x < -2 \\ x + 1 & -2 \leq x < 0 \\ 2x & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \\ x^2 + 1 & 1 < x \leq 2 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \dfrac{|x+2|}{x+2} & -3 \leq x < -1;\ x \neq -2 \\ 2 + x & -1 \leq x < 1 \\ x^2 + |x| + 1 & 1 \leq x < 2 \\ 9 - x & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

mit den Definitionsbereichen $D_f = [-3, 2]$ und $D_g = [-3, 3] \setminus \{-2\}$. Man überprüfe beide Funktionen auf Stetigkeit und skizziere ihre Graphen.

Da die f an den „Zwischenstücken“ als Zusammensetzung stetiger Funktionen selbst stetig ist, sind nur jene Punkte zu untersuchen, an denen die Funktion umdefiniert wird:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-2}(x^2-5) = (-2)^2 - 5 = -1 \\ \lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to-2}(x+1) = -2+1 = -1 \end{array}\right\} = \lim_{x\to-2} f(x) = -1 = f(-2)$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0}(x+1) = 0+1 = 1 \\ \lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0} 2x = 2\cdot 0 = 0 \end{array}\right\} \neq$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1} 2x = 2\cdot 1 = 2 \\ \lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1}(x^2+1) = 1^2+1 = 2 \end{array}\right\} = \lim_{x\to1} f(x) = 2 \neq 1 = f(1)$$

In $x = -2$ existieren links- und rechtsseitiger Limes, sie sind gleich, also existiert auch der Limes selbst; da er gleich dem Funktionswert ist, ist f dort stetig. In $x = 0$ sind links- und rechtsseitiger Grenzwert ungleich; in $x = 1$ sind sie zwar gleich, und der Grenzwert selbst existiert deshalb, er ist aber ungleich dem Funktionswert. An $x = 0$ und $x = 1$ ist die Funktion f also unstetig, auf $D(f) \setminus \{0,\, 1\}$ ist sie stetig.

Für g gilt im Prinzip analog zu f, dass die Funktion an den „Zwischenstücken“ stetig ist; allerdings sind zusätzliche Punkte zu beachten, wo das Argument eines Betrages das Vorzeichen wechselt:

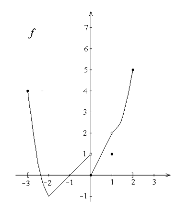
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-2^-} g(x) = \lim\limits_{x\to-2} \dfrac{-(x+2)}{x+2} = \lim\limits_{x\to-2}(-1) = -1 \\ \lim\limits_{x\to-2^+} g(x) = \lim\limits_{x\to-2} \dfrac{x+2}{x+2} = \lim\limits_{x\to-2} 1 = 1 \end{array}\right\} \neq$$

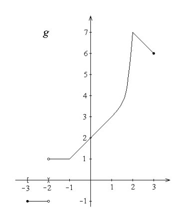
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x+2}{x+2} = \lim\limits_{x\to-2} 1 = 1 \\ \lim\limits_{x\to-1^+} g(x) = \lim\limits_{x\to-1}(2+x) = 2-1 = 1 \end{array}\right\} = \lim_{x\to-1} f(x) = 1 = f(-1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to1}(2+x) = 2+1 = 3 \\ \lim\limits_{x\to1^+} g(x) = \lim\limits_{x\to1}(x^2+|x|+1) = 1^2+|1|+1 = 3 \end{array}\right\} = \lim_{x\to1} f(x) = 3 = f(1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to2}(x^2+|x|+1) = 2^2+|2|+1 = 7 \\ \lim\limits_{x\to2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to2}(9-x) = 9-2 = 7 \end{array}\right\} = \lim_{x\to2} f(x) = 7 = f(2)$$

Nur bei $x = -2$ sind links- und rechtsseitiger Grenzwert ungleich; da dieser Punkt aber aus der Definitionsmenge ausgenommen wurde und überall sonst der Grenzwert existiert und gleich dem Funktionswert ist, ist g überall auf D_g stetig.





10 Ableitungen der elementaren Funktionen

Die bisherigen Überlegungen zur Differentialrechnung waren eher theoretischer Natur. Nun wollen wir uns aber konkret damit beschäftigen, wie man die Ableitung einer gegebenen Funktion wirklich bestimmt. Zunächst einmal wird das gemäß Definition mittels Grenzwert sein, sehr bald schon wird man aber sehen, dass es eine Handvoll Regeln gibt, die diese umständliche Prozedur in vielen Situationen ersetzen können.

10.1 Die Ableitung der elementaren Funktionen

Längst nicht alle Funktionen sind differenzierbar: Alle unstetigen Funktionen kommen von vornherein nicht in Frage, aber sogar die meisten stetigen Funktionen sind nirgendwo(!) differenzierbar. Glücklicherweise ist das bei jenen Funktionen, mit denen man es im täglichen Leben meistens zu tun hat, nicht der Fall. Die Quadratfunktion ist zum Beispiel problemlos differenzierbar; und es gilt für $f(x) = x^2$:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{(x - x_0)\cdot(x + x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} (x + x_0) = 2x_0.$$

Analog erhält man für alle allen anderen (auch beliebige reelle) Potenzen: $\frac{d}{dx}x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$ (Merkregel: *Alte Hochzahl kommt herunter, neue Hochzahl ist um Eins kleiner*). Die Ableitung einer Konstanten ist klarerweise immer Null:

$$\frac{d}{dx}c = \lim_{x\to x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{0}{x - x_0} = 0.$$

Weiters ist das Ableiten eine lineare Operation, es gilt also

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(c\,f(x)\right) = c\,f'(x) \qquad\qquad \frac{d}{dx}\left(f(x) + g(x)\right) = f'(x) + g'(x)}$$

Insbesondere sind damit alle Polynome differenzierbar:

$$\frac{d}{dx}\left(a_n x^n + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0\right) = n a_n x^{n-1} + \ldots + 2a_2 x + a_1.$$

Glücklicherweise sind die Ableitungen der Exponentialfunktion, der Winkel- und der Hyperbelfunktionen ebenfalls sehr einfach. Es gilt: $(e^x)' = e^x$, $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(\sinh x)' = \cosh x$ und $(\cosh x)' = \sinh x$.

Beispiel: Exemplarisch für die anderen Funktionen soll hier der Ursprung der Ableitungsformel für $f(x) = \sin x$ angedeutet werden:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} = \\ &= \cos x \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h}}_{=1} + \sin x \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h}}_{=0} = \cos x \end{aligned}$$

Die beiden Grenzwerte, die in der Rechnung auftreten, können z.B. geometrisch begründet werden. Eine Berechnung mit den Regeln von de'l Hospital (**??**) wäre einfacher, würde aber schon die Kenntnis der Winkelfunktionsableitungen voraussetzen. Einen alternativen Zugang stellen generell Potenzreihen dar.

Zum Ableiten von Umkehrfunktionen ist es oft nützlich, wenn man die Rolle von abhängiger und unabhängiger Variable vertauscht. Wenn nämlich $u(x)$ eine differenzierbare und umkehrbare Funktion mit $\frac{du}{x} = u'$ ist, dann gilt für die Ableitung der Umkehrfunktion $x(u)$: $\frac{dx}{du} = \frac{1}{u'}$, oder vielleicht noch eleganter angeschrieben:

$$\frac{du}{dx} = \left(\frac{dx}{du}\right)^{-1}$$

Mit dieser Technik lassen sich die Ableitungen von Umkehrfunktionen meist einfach ermitteln. So ist etwa für den Logarithmus $u = \ln x$ natürlich $x = e^u$, man erhält also $\frac{dx}{u} = e^u$ und daraus weiter $\frac{du}{dx} = \frac{1}{dx/du} = \frac{1}{e^u} = \frac{1}{x}$, kurz also die vermutlich bereits bekannte Formel:

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$$

Analog lassen sich so auch die Ableitungen von Arcus- und Areafunktionen ermitteln.

Bsp.:
$$u = \arcsin x,\ x = \sin u,\ \frac{dx}{du} = \cos u,\ \frac{du}{dx} = \frac{1}{\cos u} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 u}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Die Ableitungen der elementaren Funktionen sind noch einmal in der folgenden Tabelle zusammengefaßt. Die meisten Einträge lassen sich direkt mit den bisher vorgestellten Ableitungsregeln oder jenen aus dem nächsten Abschnitt verifizieren:

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
c	0	x^n	nx^{n-1}
e^x	e^x	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$	$\sinh x$	$\cosh x$
$\cos x$	$-\sin x$	$\cosh x$	$\sinh x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\coth x$	$-\frac{1}{\sinh^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{Arsinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{Arcosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{Artanh} x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{Arcoth} x$	$-\frac{1}{x^2-1}$

Hat eine Funktion f mit der Ableitung $f'(x)$ als Argument einen Ausdruck $ax+b$, so gilt für die Ableitung nach x:

$$\frac{d}{dx}f(ax+b) = a\cdot f'(ax+b).$$

Das ist ein Spezialfall der im folgenden vorgestellten Kettenregel, ebenso wie die *logarithmische Ableitung* einer (positiven) Funktion f:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\ln f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}}$$

11 Ableitungsregeln

Nun braucht man aber keine Angst zu haben, dass man die Ableitungen zusammengesetzter Funktionen jedesmal mittels aufwendiger Grenzwerte ermitteln müsste, denn glücklicherweise gibt es drei einfache Regeln für solche Fälle. So muß man etwa die Ableitung eines Produktes nicht aufwendig berechnen, sofern man die Ableitungen der Faktoren kennt (*Produktregel*):

$$
\begin{aligned}
&(f(x)\,g(x))' = \\
&= \lim_{z\to x}\frac{f(z)\,g(z)-f(x)\,g(x)}{z-x} = \lim_{z\to x}\frac{f(z)\,g(z)-f(x)\,g(z)+f(x)\,g(z)-f(x)\,g(x)}{z-x} = \\
&= \lim_{z\to x}\frac{f(z)\,g(z)-f(x)\,g(z)}{z-x} + \lim_{z\to x}\frac{f(x)\,g(z)-f(x)\,g(x)}{z-x} = \\
&= \lim_{z\to x}\left\{g(z)\,\frac{f(z)-f(x)}{z-x}\right\} + \lim_{z\to x}\left\{f(x)\,\frac{g(z)-g(x)}{z-x}\right\} = \\
&= g(x)\,f'(x) + f(x)\,g'(x)
\end{aligned}
$$

Die Produktregel ist auch anschaulich einigermaßen klar: Will man die Änderung eines Produkts berechnen, so genügt es in erster Näherung, jeweils einen der beiden Faktoren konstant zu halten und den anderen zu verändern; anschließend werden die beiden so erhaltenen Änderungen addiert.

Ebenso gibt es einen allgemeinen Ausdruck für die Ableitung einer Funktion f, die von einer anderen Funktion φ abhängt (*Kettenregel*):

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}f(\varphi(x)) = \lim_{z\to x}\frac{f(\varphi(z))-f(\varphi(x))}{z-x} = \lim_{z\to x}\left\{\frac{f(\varphi(z))-f(\varphi(x))}{z-x}\cdot\frac{\varphi(z)-\varphi(x)}{\varphi(z)-\varphi(x)}\right\} = \\
&= \lim_{z\to x}\left\{\frac{f(\varphi(z))-f(\varphi(x))}{\varphi(z)-\varphi(x)}\cdot\frac{\varphi(z)-\varphi(x)}{z-x}\right\} = \lim_{z\to x}\frac{f(\varphi(z))-f(\varphi(x))}{\varphi(z)-\varphi(x)}\cdot\lim_{z\to x}\frac{\varphi(z)-\varphi(x)}{z-x} = \\
&= \frac{df}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dx}
\end{aligned}
$$

VORSICHT! Eine besonders häufige Fehlerquelle bei der Berechnung von Ableitungen ist das Vergessen der inneren Ableitung φ'.

Mit Hilfe von Produkt- und Kettenregel kann man auch für die Ableitung eines Bruchs eine einfache Formel angeben (*Quotientenregel*):

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \left(u\,v^{-1}\right)' = u'\,v^{-1} - u\,v^{-2}\,v' = \frac{u'}{v} - \frac{u\,v'}{v^2} = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$$

(Die Quotientenregel läßt sich auch – viel aufwendiger – ohne Benutzung der Kettenregel herleiten.) Im folgenden sind die drei wesentlichen Ableitungsregeln noch einmal übersichtlich zusammengestellt:

Produktregel	Kettenregel	Quotientenregel
$\frac{d}{dx}(u\cdot v) = u\,v' + u'\,v$	$\frac{d}{dx}f(\varphi(x)) = \frac{df}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dx}$	$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'\,v-u\,v'}{v^2}$

In speziellen Fällen, insbesondere für Funktionen, die an gewissen Punkten anders definiert sind, kommt man natürlich um das Arbeiten mit Grenzwerten nicht herum.

12 Übungsbeispiele – Ableitungsregeln

Man berechne die erste Ableitung f' der folgenden Funktionen:

1) $f(x) = e^{ax^2+bx+c}$ *2)* $f(x) = \ln \dfrac{1}{1+x^2}$ *3)* $f(x) = x^2 e^{-x}$

4) $f(x) = \dfrac{\cosh x}{x^2+3x+1}$ *5)* $f(x) = \arcsin(ax+b)$ *6)* $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2+2x+1}$

1. Kettenregel: $f'(x) = (2ax+b)\, e^{ax^2+bx+c}$
2. $f'(x) = \dfrac{1}{\frac{1}{1+x^2}} \left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)' = (1+x^2)\,\left((1+x^2)^{-1}\right)' = (1+x^2)\,(-1)\,(1+x^2)^{-2}\, 2x = -\dfrac{2x}{1+x^2}$
3. Produktregel: $f'(x) = 2x\, e^{-x} - x^2\, e^{-x} = (2x - x^2)\, e^{-x}$
4. Quotientenregel: $f'(x) = \dfrac{\sinh x \cdot (x^2+3x+1) - \cosh x \cdot (2x+3)}{(x^2+3x+1)^2}$
5. Kettenregel: $f'(x) = \dfrac{a}{\sqrt{1-(ax+b)^2}}$
6. Quotientenregel: $f'(x) = \dfrac{e^x \cdot (x^2+2x+1) - e^x \cdot (2x+2)}{(x^2+2x+1)^2}$

Man berechne die erste Ableitung f' der folgenden Funktionen:

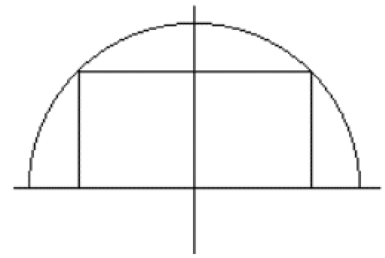
1) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ *2)* $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$ *3)* $f(x) = \sqrt{g(x)}\,;\ \ g(x) \geq 0\ \forall x \in D_g$

4) $f(x) = \cos(\ln(x^2))$ *5)* $f(x) = x^x$ *6)* $f(x) = x^{(x^x)}$

1. $f'(x) = \left(\dfrac{\ln x}{x}\right)' = \dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{1}{x}\cdot x - \ln x \cdot 1\right) = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$
2. $f'(x) = \left((1+\cos^2 x)^{-1/2}\right)' = -\dfrac{1}{2}\,(1+\cos^2 x)^{-3/2} \cdot 2\cos x\,(-\sin x) = \dfrac{\cos x\, \sin x}{(1+\cos^2 x)^{3/2}}$
3. $f'(x) = \left(g(x)^{1/2}\right)' = \dfrac{1}{2}\, g(x)^{-1/2}\, g'(x) = \dfrac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$
4. $f'(x) = -\sin(\ln(x^2)) \cdot \dfrac{2x}{x^2} = -\dfrac{2\,\sin(\ln(x^2))}{x}$
5. $f'(x) = (e^{x\cdot \ln x})' = e^{x \cdot \ln x}\left(\ln x + x \cdot \dfrac{1}{x}\right) = x^x\,(1+\ln x)$
6. $f'(x) = \left(x^{(x^x)}\right)' = \left(e^{x^x \cdot \ln x}\right)' = e^{x^x \cdot \ln x} \cdot \left(x^x \cdot \dfrac{1}{x} + x^x\,(1+\ln x)\,\ln x\right)$

13 Extremwertaufgaben

Beispiel: *Einem Halbkreis mit Radius a ist das flächengrößte Rechteck so einzuschreiben, daß zwei der Eckpunkte auf der Kreislinie und zwei auf der x-Achse liegen.*



Man kann das Problem mit gutem Gewissen symmetrisch ansetzen. Der rechte obere Eckpunkt habe die Koordinaten (x, y), die anderen drei müssen demnach $(-x, y)$, $(x, 0)$ und $(-x, 0)$ haben. Die Fläche des Rechtecks ist $2xy$, diese Funktion ist zu maximieren. Als Nebenbedingung hat man die Kreisgleichung $x^2+y^2 = a^2$, mit deren Hilfe man eine Variable explizit ausrechnen kann, etwa $y = \sqrt{a^2 - x^2}$. Das kann man nun in die Fläche einsetzen: $A = 2x\sqrt{a^2 - x^2} = 2x\,(a^2 - x^2)^{1/2}$, diese Funktion soll ein Maximum annehmen.
Die Ableitung nach der Produktregel ergibt

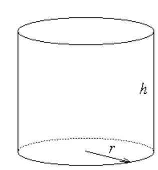
$$\frac{dA}{dx} = 2\sqrt{a^2 - x^2} + 2x\,\frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

diesen Ausdruck muß man nun Null setzen: $2\sqrt{a^2 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} = 0$ bedeutet $\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{2x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$ und nach Multiplikation mit $\sqrt{a^2 - x^2}$ ergibt sich $a^2 - x^2 = x^2$. Also ist $a^2 = 2x^2$ und damit $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ (die negative Lösung kommt nicht in Betracht). Aus der Nebenbedingung erhält man $y^2 = x^2$, das flächengrößte Rechteck hat also Eckpunkte mit den Koordinaten $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, 0\right)$ und $\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, 0\right)$. Eigentlich müßte man auch noch überprüfen, ob es sich auch wirklich um ein Maximum handelt, und nicht etwa ein Minimum oder einen Sattelwert. Im allgemeinen kann es natürlich eventuell Randextrema geben, die das eigentliche Optimum darstellen. (Hier liegen allerdings nur die Randminima $x = a$ und $x = 0$ mit der Fläche $A = 0$ vor.)

Beispiel: *Wie ist für eine zylindische Dose das Verhältnis von Höhe zu Radius zu wählen, damit das Verhltnis von Volumen zu Oberfläche möglichst günstig (maximal) wird?*

Die beiden Kenngrößen für eine Dose mit Grundflächenradius r und Höhe h sind Volumen $V = r^2\pi h$ und Oberfläche $O = 2r^2\pi + 2r\pi h$. Aus einer dieser Größen muss nun eine Variable explizit ausgedrückt werden, günstig ist hier $h = \frac{V}{r^2\pi}$. Setzt man das ein, so erhält man $O = 2r^2\pi + \frac{2V}{r}$. Die Ableitung nach r liefert $\dfrac{dO}{dr} = 4r\pi - \dfrac{2V}{r^2} \overset{!}{=} 0$ Löst man diese Gleichung nach r auf, so erhält man $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$. Setzt man das in den Ausdruck für h ein, so erhält man $h = \frac{V}{\left(\frac{V}{2\pi}\right)^{2/3}\pi} = \frac{V\,2^{2/3}}{V^{2/3}\pi} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$ und für das Verhältnis

$$\frac{h}{r} = \frac{\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}}{\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}} = \sqrt[3]{\frac{8\pi V}{\pi V}} = 2,$$



die Höhe der Dose ist also gleich ihrem Durchmesser.

14 Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung

> f sei stetig auf $[a,\, b]$ und differenzierbar auf (a, b). Dann gibt es zumindest ein $\xi \in (a, b)$, für das gilt:
>
> $$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$
>
> (Mittelwertsatz der Differentialrechung)

Beispiel: Wir beweisen mit Hilfe der ersten Mittelwertsatzes der Differentialrechnung für das Intervall $(0, 1)$ die Ungleichung

$$\ln(1 + x^2) < \frac{2x^2}{1 + x^2}.$$

Dazu wenden werden wir den Mittelwertsatz auf die linke Seite an, wir benötigen also die erste (und in weiser Voraussicht auch gleich die zweite) Ableitung:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x}{1 + x^2} \\ f''(x) &= \frac{2(1 + x^2) - 2x \cdot 2x}{(1 + x^2)^2} = \frac{2 - 2x^2}{(1 + x^2)^2} \end{aligned}$$

Nun betrachten wir das Intervall $(0, x)$ mit $0 < x < 1$. Laut Mittelwertsatz gibt es zumindest eine Stelle $\xi \in (0, x)$, für die gilt:

$$f'(\xi) = \frac{2\xi}{1 + \xi^2} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\ln(1 + x^2)}{x}$$

Da $f''(x) = [f'(x)]'$ in $(0, 1)$ streng positiv ist, ist $f'(x)$ streng monoton wachsend und für $\xi < x$ gilt sicher $f'(\xi) < f'(x)$. Mit oben ergibt sich nun

$$\frac{2x}{1 + x^2} = f'(x) > f'(\xi) = \frac{\ln(1 + x^2)}{x} \quad \underset{(x>0)}{\overset{|\cdot x}{\Longrightarrow}} \quad \frac{2x^2}{1 + x^2} > \ln(1 + x^2),$$

also genau die zu beweisende Aussage.

---

15 Kurvendiskussionen – Kurzüberblick

15.1 Definitionsbereich, Differenzierbarkeit und Bildbereich

Wo ist die Funktion definiert? Wo differenzierbar? Ist die Funktion am Rand des Definitionsgebiets stetig ergänzbar? In welchen Bereich von $\mathbb{R}$ hinein bildet die Funktion ab?

15.2 Nullstellen

Für welche Werte x_i gilt $f(x_i) = 0$?

15.3 Symmetrieeigenschaften

Symmetrische Funktionen:	$f(-x) = f(x)$
Schiefsymmetrische Funktionen:	$f(-x) = -f(x)$

15.4 Extremwerte

Kandianten für Extrema: Stellen mit $f'(x) = 0$

Relative Maxima:	$f''(x) < 0$	(bzw. $f'(x) = f''(x) = \ldots = f^{(2k-1)} = 0,\ f^{(2k)} < 0$)
Relative Minima:	$f''(x) > 0$	(bzw. $f'(x) = f''(x) = \ldots = f^{(2k-1)} = 0,\ f^{(2k)} > 0$)

Zusätzlich zu untersuchen: Randpunkte und Stellen, an denen f nicht differenzierbar ist. Auffinden der absoluten Extrema anhand des Vergleichs der Funktionswerte. (Vorsicht bei (halb)offenen Definitionsbereichen!)

15.5 Monotonie

monoton wachsend (↑):	$f'(x) \geq 0$	streng monoton wachsend (↑↑):	$f'(x) > 0$
monoton fallend (↓):	$f'(x) \leq 0$	streng monoton fallend (↓↓):	$f'(x) < 0$

15.6 Wendepunkte

Kandidaten an Stellen mit $f''(x) = 0$, wirklich Wendepunkte, wenn $f''(x) = \ldots = f^{(2k)} = 0$, $f^{(2k+1)} \neq 0$ (also die erste nichtverschwindende Ableitung ungerader Ordnung ist). Eventuell Wendetangenten konstruieren.

15.7 Konvexität

konvex:	$f''(x) \geq 0$	streng konvex:	$f''(x) > 0$
konkav:	$f''(x) \leq 0$	streng konkav:	$f''(x) < 0$

15.8 Asymptoten

- Vertikale Asymptoten an $x = x_0$: $\lim\limits_{x \to x_0 \pm} |f(x)| = \infty$
- Asymptoten der Form $y = kx + d$ mit $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ und $d = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx)$.

15.9 Skizze

Skizze möglichst mittels Nullstellen, Extremstellen, Wendepunkten und Asymptoten, falls notwendig zusätzlich auch mit Wertetabelle.

BEISPIEL: Man diskutiere die Funktion $f(x) = (x-a) \cdot e^{x-a}$:

- **Untersuchung des Definitionsbereiches:**
  Alle vorkommenden elementaren Funktionen sind auf ganz $\mathbb{R}$ definiert; es gibt auch keine Brüche, deren Nenner Null werden könnten, also ist $D_f = \mathbb{R}$.

- **Nullstellen:**
  Nullsetzen der Funktion liefert $(x-a) \cdot e^{x-a} = 0$. Da die Exponentialfunktion nie Null werden kann, ist das nur erfüllt, wenn $x - a = 0$, also $x = 0a$ ist. ,

- **Kritische Punkte, Monotonie:**
  Bildung der ersten Ableitung $f'(x) = e^{x-a} + (x-a)\, e^{x-a} = (x+1-a)\, e^{x-a}$. Nullsetzen liefert mögliche Extremwerte: $(x+1-a)\, e^{x-a} = 0$ kann nur gelten für $x = a-1$. Das ist also der einzige Kandidat für eine Extrmestelle. (Ist $f'(x) \neq 0$ im ganzen Definitionsbereich, so ist f entweder streng monoton wachsend ($f'(x) > 0$) oder fallend ($f'(x) < 0$).

- **Zweite Ableitung:**
  Man erhält $f''(x) = e^{x-a} + (x+1-a)\, e^{x-a} = (x+2-a)\, e^{x-a}$. Einsetzen des kritischen Punktes von oben: $f''(a-1) = e^{-1} > 0$, es liegt also ein Minimum vor. (Für $f''(x_k) < 0$ hätte man ein Maximum, im Falle $f''(x_k) = 0$ könnte man allein anhand der zweiten Ableitung keine Ausage machen.)

- **Wendepunkte:**
  Nullsetzen der zweiten Ableitung liefert Kandidaten für Wendepunkte: $(x+2-a)\, e^{x-a} = 0$ hat als einzige Lösung $x = a-2$. (Wäre $f''(x)$ überall ungleich Null, so wäre f entweder streng konvex ($f''(x) > 0$) oder streng konkav ($f''(x) < 0$).) Nun betrachtet man die dritte Ableitung $f^{(3)}(x) = (x+3-a)\, e^{x-a}$. Hier ist $f^{(3)}(a-2) = e^{-2} \neq 0$, es handelt sich also tatsächlich um einen Wendepunkt.

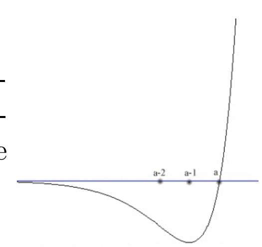
- **Asymptoten:**
  In diesem Fall gibt es keine Definitionslücken mit $\lim_{x \to x_0^\pm} = \pm\infty$, also auch keine senkrechten Asymptoten. Nun berechnet man die Grenzwerte

$$
\begin{aligned}
k_1 &= \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x-a)\cdot e^{x-a}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x-a)}{x} \cdot \lim_{x\to+\infty} e^{x-a} = \infty \\
k_2 &= \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(x-a)\cdot e^{x-a}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(x-a)}{x} \cdot \lim_{x\to-\infty} e^{x-a} = 0 \\
d_2 &= \lim_{x\to-\infty} (f(x) - k_2 x) = \lim_{x\to-\infty} (x-a)\cdot e^{x-a} = 0
\end{aligned}
$$

  Die einzige Asymptote ist also $y = 0$ (für $x \to -\infty$).

- **Skizze:**

  Skizzieren des Funktionsgraphen mit Hilfe von Nullstellen, Extrem- und Wendepunkten, dem Monotonieverhalten sowie den Asymptoten, im Zweifelsfalle zusätzlich noch mit Funktionswerten für einzelne zusätzliche Punkte.



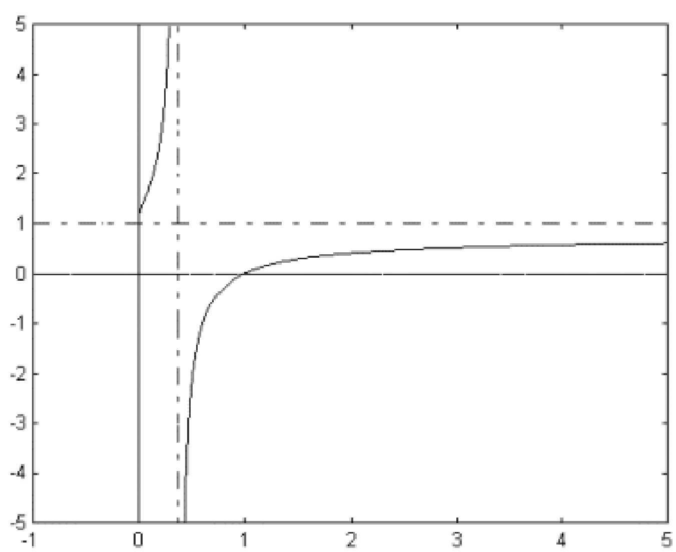
16 Übungsaufgaben – Kurvendiskussionen

Man diskutiere die Funktion $f(x) = \dfrac{\ln x}{1+\ln x}$
(Definitionsmenge, Nullstellen, Extrema, Wendepunkte, Bildmenge, Asymptoten, Skizze)

- $\ln x$ ist nur definiert für $x > 0$, daher ist $D_f \subset \mathbb{R}^+$. Weiters ist Division durch Null nicht erlaubt, $(1 + \ln x) = 0$ für $x = \frac{1}{e}$, daraus folgt für die Definitionsmenge: $D_f = \mathbb{R}^+ \setminus \{\frac{1}{e}\}$. Übrigens ist $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$, die Funktion wäre also mit $f(0) = 1$ stetig ergänzbar.
- $f'(x) = \dfrac{1}{x\,(1+\ln x)^2}$ ist für $x > 0$ immer positiv, weil sowohl der Zähler als auch das Quadrat im Nenner immer < 0 sind. Das bedeutet, $f(x)$ ist auf allen Teilintervallen von D_f streng monoton wachsend, es gibt keine Extrema. (Die stetige Ergänzung mit $f(0) = 1$ hätte in $x = 0$ ein relatives (Rand-)Minimum.)
- $f''(x) = -\dfrac{3+\ln x}{x^2\,(1+\ln x)^3}$ ist Null genau dann, wenn $3+\ln x = 0$, also für $x = \frac{1}{e^3}$, dort ist auch $f^{(3)}(x) \neq 0$. Es ist $f(\frac{1}{e^3}) = \frac{3}{2}$, also hat der einzige Wendepunkt die Koordinaten $\left(\frac{1}{e^3}, \frac{3}{2}\right)$.
- Für sehr kleine positive x ist $\ln x$ einerseits negativ, andererseits betragsmäßig sehr groß, also hat $f(x)$ einen Wert knapp über Eins. Von da an steigt die Funktion bis $x = \frac{1}{e}$ ins Unendliche an. Für alle $x > \frac{1}{e}$ steigt f von minus Unendlich weg wieder an. Für große x wird $\ln x$ wieder betragsmäßig groß, ist aber diesmal positiv, d.h. der Bruch ist immer kleiner als Eins. Insgesamt wird also auf ganz $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ abgebildet.
- $x = \frac{1}{e}$ ist die einzige senkrechte Asymptote. Für negative Zahlen ist die Funktion gar nicht definiert, der Grenzübergang nach $-\infty$ entfällt. Die beiden anderen Grenzwerte existieren dafür:

  $$\begin{aligned} k &= \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x}\,\frac{\ln x}{1+\ln x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{1+\ln x} = 0 \cdot 1 = 0 \\ d &= \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{1+\ln x} = 1 \end{aligned}$$

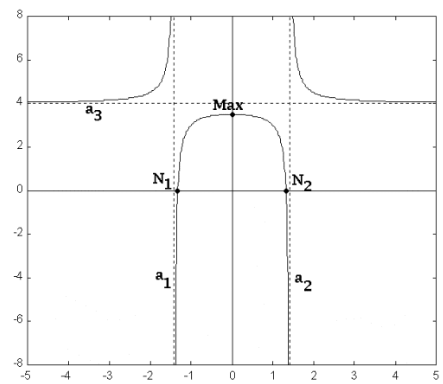
  Es gibt also eine zusätzliche Asymptote $y = 1$.
- Aus den Informationen über Asymptoten und Montonie kann man nun auch leicht eine Skizze des Funktionsgraphen erstellen:



Man diskutiere die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{x^2-2} + 4$

- Untersuchung des Definitionsbereiches: f ist nicht definiert an Nullstellen des Nenners: $x^2 - 2 = 0$, also $x = \pm 2$. Damit ist $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$.
- Nullstellen: $\dfrac{1}{x^2-2} + 4 = 0$, $1 + 4(x^2-2) = 0$, $x^2 = \frac{7}{4}$, $N_1(-\frac{\sqrt{7}}{2}, 0)$, $N_2(\frac{\sqrt{7}}{2}, 0)$
- Bildung und Nullsetzen der ersten Ableitung: $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2-2)^2}$. Diese wird nur Null, wenn $2x = 0$ ist, also ist $x = 0$ der einzige kritische Punkt.
- Bildung der zweiten Ableitung $f''(x) = \dfrac{-2\,(x^2-2)^2 + 2x\,2\,(x^2-2)\,2x}{(x^2-2)^4} = \dfrac{6x^2+4}{(x^2-2)^3}$, Einsetzen des kritischen Punktes von oben: $f''(0) = -\frac{1}{2} < 0$, es liegt also ein (relatives) Maximum vor, $M_1(0, \frac{7}{2})$.
- Wendepunkte: $6x^2 + 2$ ist immer positiv, $(x^2-2)^3$ ist für $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}$ immer negativ, für $x \in \mathbb{R} \setminus [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ immer positiv, also gibt es keine Wendepunkte.
- Asymptoten: An den Definitionslücken gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\sqrt{2}^-} f(x) &= \lim_{x\to\sqrt{2}^+} f(x) = \infty \\ \lim_{x\to-\sqrt{2}^+} f(x) &= \lim_{x\to\sqrt{2}^-} f(x) = -\infty \end{aligned}$$



also gibt es zwei Asymptoten: $a_1 :\ x = -\sqrt{2}$ und $a_2 :\ x = \sqrt{2}$. Außerdem ist

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 4$$

demnach existiert noch eine dritte: $a_3 :\ y = 4$.

- Skizze (mittels Nullstellen und Extrema sowie Asymptoten): siehe oben

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \sinh\sqrt{1-x}$*. Man bestimme Definitionsbereich, Nullstellen, Extrema und Monotonieverhalten!*

- Das Argument der Wurzel ist nur dann nicht negativ, wenn $x \leq 1$ ist. Das ist auch schon die einzige Einschränkung, also ist $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}$.
- Die einzige Nullstelle des Sinus hyperbolicus liegt bei Null, für die Nullstelle muss daher gelten: $\sqrt{1-x} = 0$ und damit $x = 1$.
- $f'(x) = \cosh\sqrt{1-x} \cdot \dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}}$. Der Cosinus hyperbolicus ist im Reellen stets positiv, auch die Wurzel kann nie negativ werden, daher ist wegen des negativen Vorzeichens der inneren Ableitung $f'(x) < 0$ für alle $x \in D_f$. Die Funktion ist streng monoton fallend.
- Wegen $f'(x) \neq 0$ gibt es keine inneren Extrema, sehr wohl aber ein Randextremum: Die Nullstelle $N(1, 0)$ ist zugleich auch das absolute Minimum.

Man zeige, dass die Funktion $f(x) = x^3 \cdot \cosh x$ mit $D_f = \mathbb{R}$ keine Extrema besitzt.

Man erhält

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 \cosh x + x^3 \sinh x = x^2 (3 \cosh x + \sinh x) \\ f''(x) &= 6x \cosh x + 6x^2 \sinh x + x^3 \cosh x \\ f^{(3)}(x) &= 6 \cosh x + 18x \sinh x + 9x^2 \cosh x + x^3 \sinh x \end{aligned}$$

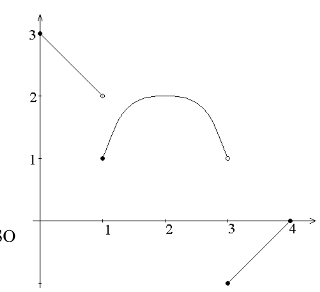
Die einzige Nullstelle von f' liegt bei $x = 0$, dort ist $f''(x) = 0$ und $f^{(3)}(x) \neq 0$, also liegt kein Extremum vor. Das selbe Ergbnis erhält man natürlich auch aus Symmetrieüberlegungen.

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x & 0 \le x < 1 \\ 4x - x^2 - 2 & 1 \le x < 3 \\ x - 4 & 3 \le x \le 4 \end{cases}$$

mit Definitionsbereich $D_f = [0, 4]$. Man bestimme und klassifiziere alle Extrema.

Im Teilabschnitt $D_f^{(1)} = [0, 1)$ gilt:



$$f(0^+) = f(0) = 3, \qquad f(1^-) = 2, \qquad f'(x) = -1 < 0$$

In $D_f^{(2)} = [1, 3)$ erhält man

$$f(1^+) = f(1) = 1, \qquad f(3^-) = 1, \qquad f'(x) = 4 - 2x$$

die Ableitung wird nur Null für $x = 2$, dort ist $f''(x) = -2 < 0$, also liegt ein Maximum mit $f(2) = 2$ vor. In $D_f^{(3)} = [3, 4]$ ist

$$f(3^+) = f(3) = -1, \qquad f(4^-) = f(4) = 0, \qquad f'(x) = 1 > 0$$

Demnach liegt das absolute (Rand)maximum bei $x = 0$, ein relatives Minimum bei $x = 1$, ein relatives Maximum bei $x = 2$, das absolute Minimum bei $x = 3$ und ein weiteres relatives (Rand)maximum bei $x = 4$.

Man beweise: Die rationale Funktion

$$f(x) := \frac{ax + b}{cx + d}$$

mit $c \neq 0$ hat nur dann innere Extrema auf $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$, wenn sie konstant ist.

Die Funktion ist auf ganz D_f differenzierbar, man erhält für die erste Ableitung

$$f'(x) = \frac{a\,(cx + d) - (ax + b)\,c}{(cx + d)^2} = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$$

und als Bedingung für die Existenz kritischer Punkt $ad - bc = 0$. Wer schon einmal friedlichen Kontakt mit der linearen Algebra und insbesondere der Theorie der Determinante hatte, weiß nun, was gespielt wird; für alle anderen ergibt eine schnelle Rechnung $a = \frac{bc}{d}$ und weiter:

$$f(x) = \frac{\frac{bc}{d} x + b}{cx + d} = \frac{b}{d} \frac{cx + d}{cx + d} = \frac{b}{d}$$

Die Funktion muss also tatsächlich konstant sein, damit ist natürlich jeder Punkt absolutes Maximum und Minimum gleichzeitig.

17 Übungsaufgaben – Satz von Taylor

Man bestimme die Taylorpolynome zweiten Grades mit Entwicklungsmitte $x_0 = 0$ der folgenden Funktionen:

$$f(x) = \cos(e^x - 1) \qquad g(x) = \sin(\pi \cos x)$$

Zuerst berechnet man die Ableitungen der Funktionen:

$$\begin{array}{ll}
f(x) = \cos(e^x - 1) & f(0) = 1 \\
f'(x) = -\sin(e^x - 1)\, e^x & f'(0) = 0 \\
f''(x) = -\cos(e^x - 1)\, e^{2x} - \sin(e^x - 1)\, e^x & f''(0) = -1
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
g(x) = \sin(\pi \cos x) & g(0) = 0 \\
g'(x) = -\pi \sin x \cos(\pi \cos x) & g'(0) = 0 \\
g''(x) = -\pi^2 \sin^2 x \sin(\pi \cos x) - \pi \cos x \cos(\pi \cos x) & g''(0) = \pi
\end{array}$$

und erhält damit

$$T_{2,f}(x;0) = 1 - \frac{x^2}{2} \qquad T_{2,g}(x;0) = \frac{\pi}{2} x^2.$$

Im ersten Fall würde man das auch problemlos über Ineinandereinsetzen von bekannten Entwicklungen erhalten,

$$f(x) = 1 - \frac{u^2}{2} + \mathcal{O}(u^4)\Big|_{u=1+x+\frac{x^2}{2}+\mathcal{O}(x^3)-1} = 1 - \frac{1}{2}\left(x + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3)\right)^2 = 1 - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3)$$

Im zweiten Fall müßte man für diese Vorgangsweise allerdings die Entwicklung des Sinus um $u_0 = \pi$ verwenden, nicht die (allgemein bekannte) um 0.

Man bestimme die Taylorpolyome $T_2(x;1)$ von $f(x) = x^2 e^{x-1}$,
$T_4(x;-1)$ von $g(x) = x^4 + 3x^2 + 1$
und $T_2(x;0)$ von $h(x) = \cosh(\sin x)$.

Für die ersten beiden Ableitungen von f erhält man:

$$\begin{array}{lll}
f(x) = x^2 e^{x-1} & f(1) = 1 & a_0 = 1 \\
f'(x) = 2x e^{x-1} + x^2 e^{x-1} & f'(1) = 3 & a_1 = 3 \\
f''(x) = 2e^{x-1} + 4x e^{x-1} + x^2 e^{x-1} & f''(0) = 7 & a_2 = \frac{7}{2}
\end{array}$$

also $T_2(x;1) = 1 + 3(x-1) + \frac{7}{2}(x-1)^2$. Analog für g:

$$\begin{array}{lll}
g(x) = x^4 + 3x^2 + 1 & g(-1) = 5 & a_0 = 5 \\
g'(x) = 4x^3 + 6x & g'(-1) = -10 & a_1 = -10 \\
g''(x) = 12x^2 + 6 & g''(-1) = 18 & a_2 = 9 \\
g^{(3)}(x) = 24x & g^{(3)}(-1) = -24 & a_3 = -4 \\
g^{(4)}(x) = 24 & g^{(4)}(-1) = 24 & a_3 = 1
\end{array}$$

und damit: $T_4(x;-1) = 5 - 10\,(x+1) + 9\,(x+1)^2 - 4\,(x+1)^3 + (x+1)^4$. Mit

$$\begin{array}{lll}
h(x) = \cosh(\sin x) & h(0) = 1 & a_0 = 1 \\
h'(x) = \sinh(\sin x)\, \cos x & h'(0) = 0 & a_1 = 0 \\
h''(x) = \cosh(\sin x)\, \cos^2 x - \sinh(\sin x)\, \sin x & h''(0) = 1 & a_2 = \frac{1}{2}
\end{array}$$

ergibt sich schließlich $T_2(x;0) = 1 + \frac{x^2}{2}$.

Man bestimme die Taylorpolyome $T_3(x;1)$ und $T_3(x;2)$ von $f(x)=\sqrt{x}$.

Für die ersten beiden Ableitungen von f erhält man:

$$\begin{array}{rclrclrcl}
f(x) &=& x^{1/2} & f(1) &=& 1 & f(2) &=& \sqrt{2} \\
f'(x) &=& \frac{1}{2}x^{-1/2} & f'(1) &=& \frac{1}{2} & f'(2) &=& \frac{1}{2^{3/2}} \\
f''(x) &=& -\frac{1}{4}x^{-3/2} & f''(1) &=& -\frac{1}{4} & f''(2) &=& -\frac{1}{2^{7/2}} \\
f^{(3)}(x) &=& \frac{3}{8}x^{-5/2} & f^{(3)}(1) &=& \frac{3}{8} & f^{(3)}(2) &=& \frac{3}{2^{11/2}}
\end{array}$$

und damit

$$\begin{aligned}
T_3(x;1) &= 1+\frac{1}{2}\,(x-1)-\frac{1}{8}\,(x-1)^2+\frac{3}{48}\,(x-1)^3 \\
T_3(x;2) &= \sqrt{2}+\frac{1}{2^{3/2}}\,(x-2)-\frac{1}{2^{9/2}}\,(x-2)^2+\frac{1}{2^{13/2}}\,(x-2)^3
\end{aligned}$$

Man bestimme das Taylorpolyom dritten Grades von

$$f(x)=\ln(1+x+x^2)$$

mit Entwicklungsmitte $x_0=0$.

Entweder über Ableitungen

$$\begin{array}{rcll}
f(x) &=& \ln(1+x+x^2) & f(0)=0 \\
f'(x) &=& \frac{1+2x}{1+x+x^2} & f'(0)=1 \\
f''(x) &=& \frac{2\,(1+x+x^2)-(1-2x)^2}{(1+x+x^2)^2} & f''(0)=1 \\
f'''(x) &=& \frac{2\,(1+2x)\,\left\{(1+2x)^2-3\,(1+x+x^2)\right\}}{(1+x+x^2)^3} & f'''(0)=-4
\end{array}$$

und Taylorformel

$$T_3(x;\,0)=x+\frac{1}{2}\,x^2-\frac{2}{3}\,x^3$$

oder mittels bekannter Entwicklung von $\ln(1+u)$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln(1+u)\big|_{u=x+x^2}=u+\frac{1}{2}\,u^2+\frac{1}{3}\,u^3+\mathcal{O}(u^4)\big|_{u=x+x^2}= \\
&= x+x^2+\frac{1}{2}\,(x+x^2)^2+\frac{1}{3}\,(x+x^2)^3+\mathcal{O}(x^4)=x+\frac{1}{2}\,x^2-\frac{2}{3}\,x^3+\mathcal{O}(x^4),
\end{aligned}$$

wobei die Ergebnisse natürlich übereinstimmen.

Beispiel: Wir bestimmen nun das Taylorpolynom zweiten Grades der Funktion

$$f(x) = \cosh(x^2 - x)$$

mit Entwicklungsmitte $x_0 = 0$:

$$\begin{array}{ll} f(x) = \cosh(x^2 - x) & f(0) = 1 \\ f'(x) = \sinh(x^2 - x) \cdot (2x - 1) & f'(0) = 0 \\ f''(x) = \cosh(x^2 - x) \cdot (2x - 1)^2 + 2\sinh(x^2 - x) & f''(0) = 1 \end{array}$$

Damit ist also

$$T_2(x; 0) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2}x^2 = 1 + \frac{x^2}{2}.$$

Beispiel: Nun bestimmen wir $T_2(x; \sqrt{\pi})$ der Funktion

$$f(x) = e^{\sin(x^2)}.$$

Für die Ableitungen ergibt sich nach Produkt- und Kettenregel:

$$\begin{array}{ll} f(x) = e^{\sin(x^2)} & f(\sqrt{\pi}) = 1 \\ f'(x) = e^{\sin(x^2)} \cdot \cos(x^2) \cdot 2x & f'(\sqrt{\pi}) = -2\sqrt{\pi} \\ f''(x) = 4x^2\cos^2(x^2)\,e^{\sin(x^2)} - 4x^2\sin(x^2)e^{\sin(x^2)} + 2\cos(x^2)e^{\sin(x^2)} & f''(\sqrt{\pi}) = 4\pi - 2 \end{array}$$

Einsetzen in die Taylor-Formel ergibt hier:

$$T_2(x; \sqrt{\pi}) = 1 - 2\sqrt{\pi}\,(x - \sqrt{\pi}) + (2\pi - 1)\,(x - \sqrt{\pi})^2$$

Beispiel: Nach der speziellen Relativitätstheorie ist die Energie eines mit der Geschwindigkeit v bewegten Körpers der Ruhemasse m_0 gegeben durch:

$$E(v) = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}},$$

wobei c die konstante Vakuumlichtgeschwindigkeit ist. Nun wollen wir eine Näherung für kleine Geschwindigkeiten, also $v \ll c$ bzw. $\frac{v}{c} \ll 1$ ermitteln:

Dazu entwickeln wir nach Taylor, wobei als Variable sofort $x = \left(\frac{v}{c}\right)^2$ wählen kann. Läßt man die Konstanten vorläufig beiseite, so erhält man

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-1/2} \\ f'(x) &= -\frac{1}{2}(1-x)^{-3/2} \cdot (-1) = \frac{1}{2(1-x)^{3/2}} \end{aligned}$$

also $f(0) = 1$, $f'(0) = \frac{1}{2}$ und für das Taylorpolynom ersten Grades (also die lineare Näherung) $T_1(x; 0) = 1 + \frac{x}{2}$. Setzt man nun die ursprünglichen Variablen und die Konstanten wieder ein, so ergibt sich

$$E(v) \approx m_0c^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2\right) = m_0c^2 + \frac{m_0\,v^2}{2}$$

Der erste, konstante Term entspricht dabei der (üblicherweise nicht in Erscheinung tretenden) Ruheenergie, der zweite hingegen ist genau die kinetische Energie der klassischen Newtonschen Mechanik. Diese ist ja gerade der für $v \ll c$ gültige Grenzfall der umfassenderen Relativitätstheorie.

BEISPIEL: Man bestimme die Taylorreihe von $f(x) = \frac{x}{1+x}$ mit Entwicklungsmitte $x_0 = \frac{1}{3}$. Zusätzlich untersuche man, ob die Reihe die Funktion an $x_1 = 0$ darstellt.	BEISPIEL: Man bestimme die Taylorreihe von $f(x) = (1+x)\cdot e^x$ um $x_0 = -1$. Außerdem zeige man, dass die Reihe die Funktion für alle $x \in \mathbb{R}$ darstellt.

Man bilde die ersten paar Ableitungen und versuche, ein System dahinter zu erkennen, um so auf eine explizite Formel zu kommen (die oft erst ab einer gewissen Ableitungsordnung gilt). Im Idealfall sollte man diese Formel noch mittels vollständiger Induktion beweisen.

$f'(x) = \frac{1\cdot(1+x)-x\cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2}$ $f''(x) = -\frac{1\cdot 2}{(1+x)^3} \qquad f^{(3)}(x) = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{(1+x)^4}$ Man sieht: Das Vorzeichen wechselt, der Zähler wächst nach einer Fakultät, die Potenz des Nenners nimmt bei jeder Ableitung um Eins zu. Vermutung: $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\dfrac{n!}{(1+x)^{n+1}}$ für $n \geq 1$.	$f'(x) = e^x + (1+x)\,e^x = (1+1+x)\,e^x$ $f''(x) = e^x + (1+1+x)\,e^x = (1+2+x)\,e^x$ $f^{(3)}(x) = (1+3+x)\,e^x$ $f^{(4)}(x) = (1+4+x)\,e^x$ $(1+n)e^x$ ergibt abgeleitet $(1+n)e^x$, die Ableitung von $x\,e^x$ ist $(1+x)\,e^x$, also ergibt sich $$f^{(n)}(x) = (1+n+x)\,e^x$$ sogar für alle $n \in \mathbb{N}_0$

Einsetzen des gewünschten Entwicklungsmittelpunkts und Anschreiben der Reihe.

Für $f(x)$ gilt: $f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{4}$, für alle Ableitungen (hier schon ab der ersten): $f^{(n)}(\frac{1}{3}) = (-1)^{n+1}\dfrac{n\,!}{(\frac{4}{3})^{n+1}} = (-1)^{n+1}\,n\,!\,(\frac{3}{4})^{n+1}$ Nun kann man die Reihe anschreiben: $T(x) = \dfrac{1}{4} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,(\dfrac{3}{4})^{n+1}\,(x-\dfrac{1}{3})^n$	Einsetzen von $x = -1$ liefert: $f(-1) = 0 \qquad f^{(n)}(-1) = ne^{-1} + 0\cdot e^{-1} = \frac{n}{e}$ Damit erhält man für die Reihe: $T(x) = 0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\,(x+1)^n}{e\,n\,!} = \dfrac{1}{e}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+1)^n}{(n-1)\,!}$

Stellt die Reihe die Funktion an einer Stelle $x \neq x_0$ dar? Dazu muss man das Restglied untersuchen, die Funktion wird dargestellt, wenn $R_n(x)$ eine Nullfolge ist.

Untersuchung an $x = 0$: Für das Restglied gilt: $R_n(x;\frac{1}{3}) = \dfrac{(x-\frac{1}{3})^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\dfrac{(-1)^{n+2}\cdot(n+1)!}{(1+\frac{1}{3}+\vartheta\cdot(x-\frac{1}{3}))^{n+2}}$ $R_n(0;\frac{1}{3}) = \dfrac{(-1)^n\cdot(-\frac{1}{3})^{n+1}}{(\frac{4}{3}-\frac{\vartheta}{3})^{n+2}}$ Der Nenner ist immer größer als 1, also: $\left\|R_n(0;\frac{1}{3})\right\| = \dfrac{(\frac{1}{3})^{n+1}}{(\frac{4}{3}-\frac{\vartheta}{3})^{n+2}} < \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ Die Reihe stellt die Funktion also an $x = 0$ dar.	Das Lagrangesche Restglied ergibt nach Kürzen: $R_n(x;-1) = \frac{(n+1)+\vartheta\cdot(x+1)}{e\,(n+1)!}\cdot e^{\vartheta\,(x+1)}\cdot(x+1)^{n+1}$ Der Ausdruck, der für beliebige x am schnellsten wächst, ist $(n+1)!$, da er im Nenner steht, geht das Restglied gegen Null, $\lim_{n\to\infty} R_n(x;-1) = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$ Die Reihe stellt die Funktion demnach für alle reellen Zahlen dar.

18 Übersicht: unbestimmte Formen

Insgesamt gibt es sieben Typen von unbestimmten Formen, auf die alle entweder die Regeln von De l'Hospital anwendbar sind oder die durch entsprechende Umformungen auf eine passende Form gebracht werden können:

$\boxed{\frac{\infty}{\infty}}$

Entweder (u.U. wiederholte) Anwendung der Regeln von DE L'HOSPITAL

Bsp: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+x}{e^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+1}{e^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2}{e^x} = 0$

Oder (bei $x \to \infty$) Zähler und Nenner durch die höchste vorkommende Potenz dividieren (Vorsicht bei Wurzeln!) und $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$ für $n > 0$ verwenden.

Bsp: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+2x+4}{x^2+\sqrt{x^4-x^2}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}{1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \dfrac{1}{1+\sqrt{1}} = \dfrac{1}{2}$

$\boxed{\frac{0}{0}}$

Anwendung der Regeln von DE L'HOSPITAL, u.U. auch mehrmals.

BSP: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{1} = 1$

BSP: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sinh x}{x\cdot\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cosh x}{\cos x - x\sin x} = 1$

$\boxed{0\cdot\infty}$

Auf $\frac{\infty}{\infty}$ oder $\frac{0}{0}$ umformen, Behandlung wie oben.

Bsp: $\lim\limits_{x\to\infty} \left(e^{-x}\ln x\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{e^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1/x}{e^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x\,e^x} = 0$

Bsp: $\lim\limits_{x\to 0^+} (x\cdot\ln x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{1/x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1/x}{-1/x^2} = \lim\limits_{x\to 0^+}(-x) = 0$

$\boxed{0^0}$, $\boxed{1^\infty}$, $\boxed{\infty^0}$

Logarithmieren, zuerst auf $0\cdot\infty$, dann weiter auf $\frac{\infty}{\infty}$ oder $\frac{0}{0}$ umformen (den Logarithmus dabei möglichst im Zähler lassen!), Behandlung wie oben.

Bsp: $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \exp \lim\limits_{x\to\infty} x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = \exp \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(1+1/x)}{1/x} =$

$= \exp \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{1}{1+1/x}\cdot\frac{-1}{x^2}}{-1/x^2} = \exp \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{1+1/x} = \exp 1 = e$

Bsp: $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x}\right)^x = \exp \lim\limits_{x\to 0^+} \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)^x = \exp \lim\limits_{x\to 0^+} x\ln\dfrac{1}{x} = \exp \lim\limits_{x\to 0^+} x\dfrac{\ln\frac{1}{x}}{1/x} =$

$= \exp \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{1}{1/x}\cdot\frac{-1}{x^2}}{-1/x^2} = \exp \lim\limits_{x\to 0^+} x = e^0 = 1$

$\boxed{\infty-\infty}$

Umformung auf $\frac{\infty}{\infty}$ oder $\frac{0}{0}$, Behandlung wie oben.

Bsp: $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x-\sqrt{x^2-1}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\cdot\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{x+\sqrt{x^2-1}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-x^2+1}{x+\sqrt{x^2-1}} = 0$

Die Form „$0^{\pm\infty}$" ist zwar ebenfalls unbestimmt, es läßt sich aber durch Umformen ohne die Regel von De l'Hospital feststellen, dass dieser Grenzwert 0 oder ∞ ergibt. Noch klarer sind Ergebnisse wie $\frac{0}{\infty} = 0$ oder $\frac{\infty}{0} = \infty$.

Bsp: $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}\ln x} = e^{\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x}} = e^{-\infty} = 0$

Bsp: $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{-\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}\ln x} = e^{-\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x}} = e^{\infty} = \infty$

Beispiel: Man ermittle die folgenden Grenzwerte:

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\sinh x}{x^3-x^4}$	$\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+e^{-x}\right)^{e^x}$	$\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x\cdot(x+1)}-x\right)$	$\lim\limits_{x\to 1^+} (\ln x)^{x-1}$

Versuchen, ob Lösen durch reines Umformen möglich ist; sonst durch Einsetzen die Form bestimmen.

„$\frac{0}{0}$“	„1^∞“	„$\infty-\infty$“	„0^0“

Falls notwendig mit Umformungen (z.B. Logarithmieren) für Division durch höchste Potenz auf oder für Anwendung von de l'Hospital auf „$\frac{0}{0}$“ bzw. „$\frac{\infty}{\infty}$“ bringen.

keine Umformung notwendig	Logarithmieren $e^{\lim\limits_{x\to\infty} \ln\left((1+e^{-x})^{e^x}\right)}$ umformen $e^{\lim\limits_{x\to\infty} e^x \ln(1+e^{-x})}$ und weiter auf $\frac{0}{0}$: $e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(1+e^{-x})}{e^{-x}}}$	Erweitern: $\cdot\frac{\sqrt{x(x+1)}+x}{\sqrt{x(x+1)}+x}$: $\frac{x(x+1)-x^2}{\sqrt{x(x+1)}+x}$ vereinfachen: $\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}$	Logarithmieren $e^{\lim\limits_{x\to 1^+} \ln\left((\ln x)^{x-1}\right)}$ umformen: $e^{\lim\limits_{x\to 1^+} (x-1)\ln(\ln x)}$ und weiter auf $\frac{\infty}{\infty}$: $e^{\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{\ln(\ln x)}{1/(x-1)}}$

Nun Regel von DE L'HOSPITAL anwenden = Zähler und Nenner getrennt differenzieren (unter Umständen auch mehrfach), bis keine unbestimmte Form mehr erhalten wird. (Für $x\to\infty$ stattdessen evtl. Zähler und Nenner durch die höchste vorkommende Potenz dividieren.)

De l'Hospital: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cosh x}{3x^2-4x^3}$ $\frac{0}{0}$, De l'Hospital: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{-\sinh x}{6x-12x^2}$ $\frac{0}{0}$, De l'Hospital: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{-\cosh x}{6-24x}$ $x=0$ einsetzen: $\frac{-\cosh 0}{6-24\cdot 0} = -\frac{1}{6}$	De l'Hospital: $e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{-e^{-x}/(1+e^{-x})}{-e^{-x}}}$ kürzen $e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{1+e^{-x}}}$ Grenzübergang: $e^{\frac{1}{1+0}} = e$	Zähler und Nenner durch x dividieren: $\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}$ Grenzübergang: $\frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{1}{2}$	De l'Hospital: $e^{\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{1/(x\cdot\ln x)}{-1/(x-1)^2}}$ Doppelbruch auflösen: $e^{-\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{(x-1)^2}{x\cdot\ln x}}$ De l'Hospital: $e^{-\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{2(x-1)}{\ln x+1}}$ $x=0$ einsetzen: $e^{-\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{2(1-1)}{\ln 1+1}} = e^0 = 1$

19 Übungsaufgaben – Regel von De l'Hospital

Man berechne die folgenden Grenzwerte:

1) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\ln(e+x))^{1/x}$ 2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\frac{1-x}{1+x}}{x}$ 3) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(\ln x)^2}{2x-2e^{x-1}}$

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 2x - \cos x}{\sin^2 x}$ 5) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{\cos x}{x}\right)$ 6) $\lim\limits_{x\to 0} (\cosh x)^{2/x^2}$

7) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos\frac{x}{2}}{1-\cos x}$ 8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{1-\cos x}$ 9) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{3/x^2}$

1. $$\lim_{x\to 0^+} (\ln(e+x))^{1/x} = \exp \lim_{x\to 0^+} \ln\left((\ln(e+x))^{1/x}\right) = \exp \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\ln(e+x))}{x} =$$
$$= \exp \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\ln(e+x)}\cdot\frac{1}{e+x}}{1} = \exp\frac{1}{e\cdot\ln(e)} = e^{1/e}$$

2. $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\frac{1-x}{1+x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{(1-x)/(1+x)}\cdot\frac{(-1)\cdot(1+x)-(1-x)\cdot 1}{(1+x)^2}}{1} = \lim_{x\to 0}\frac{-1-x-1+x}{(1+x)\,(1-x)} = -2$$

3. $$\lim_{x\to 1} \frac{(\ln x)^2}{2x-2e^{x-1}} = \lim_{x\to 1} \frac{2\cdot\ln x\cdot\frac{1}{x}}{2-2e^{x-1}} = \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-e^{x-1}}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{1}{x} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{-e^{x-1}}\cdot\frac{1}{1} =$$
$$= -\lim_{x\to 1}\frac{1}{x\,e^{x-1}} = -1$$

4. $$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos x}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 2x+\sin x}{2\sin x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{-4\cos 2x+\cos x}{2\cos^2 x-\sin^2 x} = \frac{-4+1}{2-0} = -\frac{3}{2}$$

5. $$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x\cos x}{x\cdot\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x\cos x}{x\cdot\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{1}{2}\sin 2x}{x\cdot\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{\sin x + x\cdot\cos x} =$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{\cos x+\cos x - x\cdot\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{\cos x+\cos x-x\cdot\sin x} = 0$$

6. $$\lim_{x\to 0}(\cosh x)^{2/x^2} = \exp\lim_{x\to 0}\ln\left((\cosh x)^{2/x^2}\right) = \exp\lim_{x\to 0}\frac{2\ln(\cosh x)}{x^2} = \exp\lim_{x\to 0}\frac{2\frac{\sinh x}{\cosh x}}{2x} =$$
$$= \exp\lim_{x\to 0}\frac{\tanh x}{x} = \exp\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cosh^2 x}}{1} = \exp\frac{1}{\cosh^2 0} = e$$

7. $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\frac{x}{2}}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{4}\cos\frac{x}{2}}{\cos x} = \frac{1}{4}$$

8. $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x} = 2$$

9. $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{3/x^2} = \exp\lim_{x\to 0}\ln\left[\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{3/x^2}\right] = \exp\lim_{x\to 0}\frac{3}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x} =$$
$$= \exp\left[3\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x^2}\right] = \exp\left[3\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sin x/x}\cdot\frac{x\,\cos x-\sin x}{x^2}}{2x}\right] =$$
$$= \exp\left[3\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x\,\cos x-\sin x}{2x^2\,\sin x}\right] = \exp\left[3\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot(1-\frac{x^2}{2}+\mathcal{O}(x^4))-(x-\frac{x^3}{6}+\mathcal{O}(x^5))}{2x^2\cdot(x-\frac{x^3}{6}+\mathcal{O}(x^5))}\right] =$$
$$= \exp\left[3\cdot\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{2}+\frac{x^3}{6}+\mathcal{O}(x^5))}{2x^3+\mathcal{O}(x^5)}\right] = e^{-\frac{3\cdot\frac{1}{3}}{2}} = e^{-1/2}$$

20 Standardintegrale

Eine Integraltabelle der elementaren Funktionen ergibt sich unmittelbar als Umkehrung der Ableitungstabelle. Dabei erhält man die folgenden wichtigen Beziehungen:

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
$x^\alpha\ ;\ \alpha \neq -1$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$
e^x	$e^x + C$	a^x	$\dfrac{a^x}{\ln a} + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$	$\sinh x$	$\cosh x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$	$\cosh x$	$\sinh x + C$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\begin{cases} \arctan x + C \\ -\operatorname{arccot} x + C \end{cases}$

Eine wichtige Rolle bei der Integration von Wurzelausdrücken spielen auch die Areafunktionen (bei denen es nötig sein kann, den Wertebreich zu beachten):

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} &= \ln(x+\sqrt{x^2+1}) &&= \operatorname{Arsinh} x + C \\
\int \frac{dx}{1-x^2} &= \frac{1}{2}\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C &&= \begin{cases} \operatorname{Artanh} x + C & \text{für } x \in (-1,1) \\ \operatorname{Arcoth} x + C & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus [-1,1] \end{cases} \\
\int \tfrac{dx}{\sqrt{x^2-1}} &= \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + C &&= \begin{cases} \operatorname{Arcosh} x + C & \text{für } x \in (1,+\infty) \\ -\operatorname{Arcosh}(-x) + C & \text{für } x \in (-\infty,-1) \end{cases}
\end{aligned}$$

Weitere Integrale, die des öfteren auftreten und die man sich zwar nicht zu merken braucht, aber doch entsprechend griffbereit haben sollte, sind beispielsweise (in den entsprechenden Gültigkeitsintervallen):

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$	$\dfrac{1}{\cosh^2 x}$	$\tanh x + C$
$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x + C$	$\dfrac{1}{\sinh^2 x}$	$-\coth x + C$
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert + C$	$\cot x$	$\ln\lvert\sin x\rvert + C$
$\tanh x$	$\ln\cosh x + C$	$\coth x$	$\ln\lvert\sinh x\rvert + C$

Aus der Kettenregel des Differenzierens folgt sofort eine äußerst praktische Integrationsbeziehung: Ist nämlich $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, so ist $\frac{1}{a}F(ax+b)$ eine Stammfunktin von $f(ax+b)$, also kurz:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \quad \longrightarrow \quad \int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$$

21 Übungsaufgaben – partielle Integration

Man berechne das Integral $I = \int x\,\sin x\,dx$.

$$I = \int x\,\sin x\,dx = \left|\begin{array}{cc} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array}\right| = -x\,\cos x + \int \cos x\,dx = -x\,\cos x + \sin x + C$$

Man berechne das Integral $I = \int \frac{x}{\cosh^2 x}\,dx$.

$$\begin{aligned} I &= \int x\,\frac{1}{\cosh^2 x}\,dx = \left|\begin{array}{cc} u = x & u' = 1 \\ v' = \frac{1}{\cosh^2 x} & v = \tanh x \end{array}\right| = x\cdot\tanh x - \int \tanh x\,dx = \\ &= x\cdot\tanh x - \int \frac{\sinh x}{\cosh x}\,dx = x\cdot\tanh x - \ln\cosh x + C \end{aligned}$$

Notwendig ist dabei nur die Kennnis des (Fast-)Standardintegrals $\int \frac{1}{\cosh^2 x}\,dx = \tanh x + C$ und die Anwendung der logarithmischen Integration. (Die Betragsstriche sind hier unnötig, da der Cosinus hyperbolicus ohnehin nie negativ werden kann.)

Man berechne das Integral $I = \int \frac{\ln(x^2)}{x^2}\,dx$.

$$I = \int \ln(x^2)\,\frac{1}{x^2}\,dx = \left|\begin{array}{cc} u = \ln(x^2) & u' = \frac{2x}{x^2} \\ v' = \frac{1}{x^2} & v = -\frac{1}{x} \end{array}\right| = -\frac{\ln(x^2)}{x} + \int \frac{2}{x^2}\,dx = -\frac{\ln(x^2)}{x} - \frac{2}{x} + C$$

Man berechne das Integral $I = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{x}{\sin^2 x}\,dx$.

$$\begin{aligned} I &= \int_{\pi/6}^{\pi/2} x\,\frac{1}{\sin^2 x}\,dx = \left|\begin{array}{cc} u = x & u' = 1 \\ v' = \frac{1}{\sin^2 x} & v = -\cot x \end{array}\right| = -x\,\cot x\Big|_{\pi/6}^{\pi/2} + \int_{\pi/6}^{\pi/2} \cot x\,dx = \\ &= \left[-x\,\cot x + \ln|\sin x|\right]_{\pi/6}^{\pi/2} = \frac{\sqrt{3}\,\pi}{6} + \ln 2 \end{aligned}$$

Man berechne das Integral $I = \int_0^1 r^2\,\sqrt{1-r}\,dr$.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 r^2\,\sqrt{1-r}\,dr = \left|\begin{array}{cc} u = r^2 & u' = 2r \\ v' = (1-r)^{1/2} & v = -\frac{2}{3}(1-r)^{3/2} \end{array}\right| = \\ &= \underbrace{-\frac{2r^2}{3}(1-r)^{3/2}\Big|_0^1}_{=0} + \frac{4}{3}\int_0^1 r\,(1-r)^{3/2}\,dr = \left|\begin{array}{cc} u = r & u' = 1 \\ v' = (1-r)^{3/2} & v = -\frac{2}{5}(1-r)^{5/2} \end{array}\right| = \\ &= \frac{4}{3}\left\{\underbrace{-\frac{2r}{5}(1-r)^{5/2}\Big|_0^1}_{=0} + \frac{2}{5}\int_0^1 (1-r)^{5/2}\,dr\right\} = -\frac{4}{3}\,\frac{2}{5}\,\frac{2}{7}\,(1-r)^{7/2}\Big|_0^1 = \frac{16}{105} \end{aligned}$$

22 Übungsaufgaben – Substitution

Man bestimme das Integral $I = \int \frac{\cos(\ln x)}{x}\, dx$.

Nachdem der Logarithmus als Argument des Cosinus am störendsten aussieht, substituieren wir:

$$I = \int \frac{\cos(\ln x)}{x}\, dx = \left| \begin{array}{c} u = \ln x \\ du = \frac{1}{x}\, du \end{array} \right| = \int \cos u\, du = \sin u + C = \sin(\ln x) + C$$

Man bestimme das Integral $I = \int \cos\left(e^{\sin x}\right)\, e^{\sin x}\, \cos x\, dx$

Partielle Integration wird hier kaum weiterhelfen, also versuchen wir eine Substitution:

$$\begin{aligned} I &= \int \cos\left(e^{\sin x}\right)\, e^{\sin x}\, \cos x\, dx = \left| \begin{array}{c} u = \sin x \\ du = \cos x\, dx \end{array} \right| = \\ &= \int \cos\left(e^{u}\right)\, e^{u}\, du = \left| v = e^u, \quad du = \frac{dv}{e^u} \right| = \\ &= \int \cos v\, dv = \sin v + C = \sin\left(e^u\right) + C = \sin\left(e^{\sin x}\right) + C \end{aligned}$$

Natürlich hätte man (mit dem entsprechenden prophetischen Blick, der sich nach dem Rechnen einiger Beispiele fast automatisch einstellt) auch sofort $v = e^{\sin x}$ substituieren können.

Man bestimme das Integral $I = \int \frac{e^x}{e^x + e^{-x}}\, dx$

Die naheliegendste Substitution ist natürlich $u = e^x$:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{e^x}{e^x + e^{-x}}\, dx = \left| \begin{array}{c} u = e^x \\ du = e^x\, dx \end{array} \right| = \int \frac{u}{u + \frac{1}{u}}\, \frac{du}{u} = \\ &= \int \frac{u}{u^2+1}\, du = \frac{1}{2} \int \frac{2u}{u^2+1} == \frac{1}{2} \ln\left|u^2+1\right| + C = \frac{1}{2} \ln\left|e^{2x}+1\right| + C \end{aligned}$$

Man bestimme das Integral $I = \int \frac{\ln^2 x}{x}\, dx$.

Hier substituieren wir für den Logarithmus:

$$I = \int \frac{\ln^2 x}{x}\, dx = \left| \begin{array}{c} u = \ln x \\ du = \frac{1}{x}\, du \end{array} \right| = \int u^2\, du = \frac{1}{3} u^3 + C = \frac{\ln^3 x}{3} + C$$

Man bestimme das Integral $I = \int e^x\, \cosh(e^x)\, e^{(e^x)}\, dx$

Hier substituiert man $u = e^x$:

$$\begin{aligned} I &= \int e^x\, \cosh(e^x)\, e^{(e^x)}\, dx = \left| \begin{array}{c} u = e^x \\ du = e^x\, dx \end{array} \right| = \int \cosh(u)\, e^u\, du = \frac{1}{2} \int \left(e^u + e^{-u}\right)\, e^u\, du = \\ &= \frac{1}{2} \int \left(e^{2u} + 1\right)\, du = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} e^{2u} + u\right] + C = \frac{1}{4} \left[e^{2e^x} + 2e^x\right] + C \end{aligned}$$

23 Übungsaufgaben – Integration rationaler Funktionen

Man bestimme das Integral $I = \int_1^2 \frac{x-27}{x^3-2x^2-3x}\,dx.$

Nullsetzen des Nenners liefert: $x^3 - 2x^2 - 3x = x\,(x^2 - 2x - 3) = 0$: $x_1 = 0$, $x_{2,3} = 1 \pm \sqrt{1+3}$

Partialbruchzerlegung: $\frac{x-27}{x^3-2x^2-3x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x+1}$

$$x - 27 = A\,(x-3)\,(x+1) + B\,x\,(x+1) + C\,x\,(x-3)$$

Polstellenmethode:

$$\begin{array}{lll} x = 0: & -27 = -3A & A = 9 \\ x = 3: & -24 = -12B & B = -2 \\ x = -1: & -28 = 4C & C = -7 \end{array}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \left(\frac{9}{x} - \frac{2}{x-3} - \frac{7}{x+1} \right) dx = \left[9\,\ln|x| - 2\,\ln|x-3| - 7\,\ln|x+1| \right]_1^2 = \\ &= 9\,(\ln 2 - \ln 1) - 2\,(\ln 1 - \ln 2) - 7\,(\ln 3 - \ln 2) = 18\,\ln 2 - 7\,\ln 3 \end{aligned}$$

Man bestimme das Integral $I = \int_0^1 \frac{x^2-6x-7}{(x-2)^2 \cdot (x^2+1)}\,dx.$

Die Polynomdivision entfällt wegen Grad Zähler $= 2 < 4 =$ Grad Nenner.

Partialbruchzerlegung: $\frac{x^2-6x-7}{(x-2)^2 \cdot (x^2+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} \qquad \Big|\cdot \text{Nenner}$

$x^2 - 6x - 7 = A\,(x-2)\,(x^2+1) + B\,(x^2+1) + (Cx+D)\,(x-2)^2$, nach Potenzen sortieren:
$x^2 - 6x - 7 = (A+C)\,x^3 + (-2A + B - 4C + D)\,x^2 + (A + 4C - 4D)\,x + (-2A + B + 4D)$
Man erhält also das Gleichungssystem $A + C = 0$, $-2A + B - 4C + D = 1$, $A + 4C - 4D = -6$, $-2A + B + 4D = -7$ mit der Lösung: $A = 2$, $B = -3$, $C = -2$, $D = 0$:

$$I = \int_0^1 \left(\frac{2}{x-2} - \frac{3}{(x-2)^2} - \frac{2x}{x^2+1} \right) dx = \left[2\,\ln|x-2| + \frac{3}{x-2} - \ln(x^2+1) \right]_0^1 = -\frac{3}{2} - 3\,\ln 2$$

Man bestimme das Integral $I = \int \frac{4x-2}{x^2+3x+3}\,dx.$

Da der Nenner keine reellen Nullstellen hat, lässt sich der Integrand nicht mehr mittels (reeller) Partialbruchzerlegung vereinfachen. Statt dessen versuchen wir, den Zähler als Ableitung des Nenners darzustellen, um logarithmisch integrieren zu können:

$$\begin{aligned} I &= 2\int \frac{2x-1}{x^2+3x+3}\,dx = \int \frac{2x+3-4}{x^2+3x+3}\,dx = 2 \cdot \left\{ \int \frac{2x+3}{x^2+3x+3}\,dx - \int \frac{4}{x^2+3x+3}\,dx \right\} = \\ &= 2 \cdot \ln|x^2+3x+3| - 8 \cdot \int \frac{1}{x^2+3x+\frac{9}{4}+\frac{3}{4}}\,dx = 2 \cdot \ln(x^2+3x+3) - 8 \cdot \int \frac{1}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\,dx \end{aligned}$$

Die Substitution $u = x + \frac{3}{2}$, $du = dx$ führt schließlich auf

$$\int \frac{du}{u^2+\frac{3}{4}} = \frac{4}{3} \cdot \int \frac{du}{\frac{4u^2}{3}+1} = \left| \begin{array}{l} v = \frac{2u}{\sqrt{3}} \\ du = \frac{\sqrt{3}}{2}dv \end{array} \right| = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \int \frac{dv}{v^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan v = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+3}{\sqrt{3}}$$

24 Übungsaufgaben – gemischte Integrationstechniken

Man berechne das Integral $I = \displaystyle\int \frac{e^x\ \sinh x}{e^x + 1}\,dx$.

Hier hilft eine Aufspaltung des Sinus hyperbolicus anhand der Definitionsgleichung:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{e^x\ \sinh x}{e^x+1}\,dx = \int \frac{e^x\ \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})}{e^x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{e^{2x}-1}{e^x+1}\,dx = \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{(e^x+1)\cdot(e^x-1)}{e^x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int (e^x-1)\,dx = \frac{e^x - x}{2} + C \end{aligned}$$

Man berechne das Integral $I = \displaystyle\int \frac{x^2+2x+2}{x^3+3x^2+6x+12}\,dx$.

Umformen erlaubt sofort eine logarithmische Integration:

$$I = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2+6x+6}{x^3+3x^2+6x+12}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{[x^3+3x^2+6x+12]'}{x^3+3x^2+6x+12}\,dx = \frac{1}{3}\ln\left|x^3+3x^2+6x+12\right|$$

Man berechne das Integral $I = \displaystyle\int x\cdot\ln(x^2)\,dx$.

Hier arbeitet man sinnvollerweise mit partieller Integration:

$$\begin{aligned} I &= \int x\cdot\ln(x^2)\,dx = \left|\begin{array}{ll} u = \ln(x^2) & u' = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x} \\ v' = x & v = \frac{x^2}{2} \end{array}\right| = \\ &= \frac{x^2}{2}\ \ln(x^2) - \int \frac{2}{x}\cdot\frac{x^2}{2}\,dx = \frac{x^2}{2}\ \ln(x^2) - \int x\,dx = \frac{x^2}{2}\ \ln(x^2) - \frac{x^2}{2} + C \end{aligned}$$

Man berechne das Integral $I = \displaystyle\int \frac{\tan x}{\cos x}\,dx$.

Hier ist es hilfreich, den Tangens aufzuspalten, danach führt eine Substitution weiter:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\tan x}{\cos x}\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx = \left|\begin{array}{l} u = \cos x \\ dx = -\frac{du}{\sin x} \end{array}\right| = \\ &= -\int \frac{\sin x}{u^2}\cdot\frac{du}{\sin x} = -\int \frac{du}{u^2} = \frac{1}{u} + C = \frac{1}{\cos x} + C \end{aligned}$$

Man berechne das Integral $I = \displaystyle\int \cosh(e^x)\,e^{2x}\,dx$.

Substitution mit anschließender partieller Integration liefert:

$$\begin{aligned} I &= \int \cosh(e^x)\,e^{2x}\,dx = \int \cosh(e^x)\,(e^x)^2\,dx = \left|\begin{array}{ll} u = e^x & x = \ln u \\ dx = \frac{dx}{du}\,du = \frac{1}{u}\,du & \end{array}\right| = \\ &= \int \cosh u\cdot u^2\,\frac{du}{u} = \int u\cdot\cosh u\,du = \left|\begin{array}{ll} f = u & f' = 1 \\ g' = \cosh u & g = \sinh u \end{array}\right| = \\ &= u\cdot\sinh u - \int \sinh u\,du = u\cdot\sinh u - \cosh u + C = e^x\ \sinh(e^x) - \cosh(e^x) + C \end{aligned}$$

Man bestimme das Integral $I = \displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos x - \sin^2 x}\, dx$.

Die naheliegende Substitution $u = \sin x$ führt zu einem Integral, das um nichts einfacher ist als das, von dem man ausgegangen ist, also wird man wohl besser einen anderen Weg einschlagen:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sin x}{\cos x - \sin^2 x}\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x - 1 + \cos^2 x}\, dx = \left| \begin{array}{c} u = \cos x \\ du = -\sin x\, dx \end{array} \right| = \\ &= -\int \frac{du}{u^2 + u - 1} = -\int \frac{du}{(u+\frac{1}{2})^2 - \frac{5}{4}} = -\frac{4}{5}\int \frac{du}{(\frac{2}{\sqrt{5}}u + \frac{1}{\sqrt{5}})^2 - 1} = \\ &= -\frac{4}{5}\frac{\sqrt{5}}{2}\operatorname{Arcoth}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}u + \frac{1}{\sqrt{5}}\right) + C = -\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{Arcoth}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}u + \frac{1}{\sqrt{5}}\right) + C \end{aligned}$$

Eine zuverlässige Alternative wäre natürlich die in **??** angegebene Standardsubstitution.

Man bestimme das Integral $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}\, dx$.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}\, dx = \left| \begin{array}{cc} u = \sqrt{1+e^{2x}} & e^{2x} = u^2 - 1 \\ du = \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}}\, dx = \frac{e^{2x}}{u}\, dx & dx = \frac{u}{e^{2x}}\, du \end{array} \right| = \\ &= \int \frac{u}{u\, e^{2x}}\, du = \int \frac{1}{u^2 - 1}\, du = \operatorname{Arcoth} u + C = \operatorname{Arcoth}\sqrt{1+e^{2x}} + C \end{aligned}$$

Man bestimme das Integral $I = \displaystyle\int \frac{\sin x}{1+\cos x}\, dx$.

Mit der Standardsubstitution $u = \tan\frac{x}{2}$ erhält man:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sin x}{1+\cos x}\, dx = \int \frac{\frac{2u}{1+u^2}}{1 + \frac{1-u^2}{1+u^2}} \frac{2\, du}{1+u^2} = 4\int \frac{\frac{u}{1+u^2}}{1+u^2+1-u^2}\, du = \\ &= \int \frac{2u}{u^2+1}\, du = \ln\left(u^2+1\right) + C = \ln\left(\tan^2\frac{x}{2} + 1\right) + C \end{aligned}$$

In diesem Fall schneller und eleganter geht es mit

$$I = \int \frac{\sin x}{1+\cos x}\, dx = -\int \frac{-\sin x}{1+\cos x}\, dx = \ln|1+\cos x| + C$$