Kapitel 1

Vektoranalysis

In der mehrdimensionalen Analysis gibt es einen Bereich, der speziell für naturwissenschaftliche und technische Anwendungen von immenser Bedeutung ist, von Fachmathematikern hingegen oft eher stiefmütterlich behandelt wird: die Vektoranalysis.

Dabei dreht es sich um Skalar- und Vektorfelder, Differentialoperatoren, die man auf diese anwenden kann, und die Integration über solche Objekte entlang von Kurven und Flächen. Diese Mittel lassen sich vor allem in der Elektrodynamik Eins-zu-Eins anwenden, aber auch in vielen anderen Bereichen spielen sie eine große Rolle.

1.1 Der Feldbegriff

Der Begriff des Feldes kommt ursprünglich aus der Physik: Dort bezeichnet ein Feld eine Größe, die vom Ort abhängig ist. So kann etwa ein Temperaturfeld $T(x, y, z)$ die Temperatur in einem Raumbereich angeben, oder ein Strömungsfeld $\boldsymbol{v}(x, y, z)$ den Geschwindigkeitsverlauf etwa einer Flüssikeitsströmung.

Vom mathematischen Standpunkt aus handelt es sich dabei natürlich um Funktionen $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, allgemein $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, also genau um eine schon ausführlich behandelte Thematik. Die Feldvorstellung ist aber ebenso verbreitet wie nützlich, und von daher werden auch wir in diesem Kapitel entsprechende Konventionen benutzen.[1]

[1] In der Physik hat der Feldbegriff eine geradezu überragende Bedeutung. Während früher, etwa zu Zeiten Newtons, noch die Vorstellung von Kraftübertragung durch Fernwirkung herrschte, ist man inzwischen zur Einsicht gelangt, dass sich Kräfte nur duch entsprechende Felder sauber beschreiben lassen. Mehr noch, auch für Teilchen werden inzwischen Felder eingeführt, und die beiden weitestreichenden Theorien der modernen Physik, die Quantenfeldtheorie und die Allgemeine Relativitätstheorie sind ihrem Wesen nach beide Feldtheorien – auch wenn sie sich in gewissem Ausmaß widersprechen. Die Feldformulierung bringt aber, speziell in der Quantenphysik, auch gravierende Nachteile mit sich, da solche Feldtheorien dazu neigen, unangenehme Divergenzen aufzuweisen, die man manchmal durch Renormierung beseitigen kann, in vielen interessanten Fällen (Quantengravitation) aber nicht.

Wir nennen also:

$$\begin{array}{rcl} \multicolumn{3}{c}{\text{Skalarfeld}} \\ \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ \boldsymbol{r} & \mapsto & \Phi(\boldsymbol{r}) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \multicolumn{3}{c}{\text{Vektorfeld}} \\ \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ \boldsymbol{r} & \mapsto & \boldsymbol{K}(\boldsymbol{r}) \end{array}$$

Daneben gibt es natürlich im Prinzip noch Tensorfelder beliebiger Stufe, die etwa Bedeutung haben, um ortsabhängige anisotrope Größen zu beschreiben; die Definition liegt dabei auf der Hand. Besonders oft werden wir natürlich mit den Fällen $n = 2$ und $n = 3$ zu tun haben.

In erster Linie interessant sind für uns natürlich solche Felder, deren Koponenten stetig differenzierbare Funktionen sind — für sie steht der mächtige Apparat der mehrdimensionalen Analysis zur Verfügung.

1.2 Differentialoperatoren

Betrachten wir vorerst einmal ein Skalarfeld $\Phi(\boldsymbol{r})$ im $\mathbb{R}^3$. Dieses Feld können wir zum Beipiel (Differenzierbarkeit sei einmal vorausgesetzt) nach x ableiten: $\frac{\partial\Phi}{\partial x}$, genausogut natürlich auch nach den anderen Koordinaten: $\frac{\partial\Phi}{\partial y}$ und $\frac{\partial\Phi}{\partial z}$. Diese drei partiellen Ableitungen wollen wir nun zu einem Vektor zusammenfassen – genau dem Gradienten, den wir schon früher kennengelernt haben:

Gradient

Der *Gradient* eines Skalarfeldes $\Phi(\vec{r})$ ist der Vektor

$$\text{grad}\ \Phi = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)$$

Wir können aber auch die partiellen Ableitungen nach den n Koordinaten des Raumes direkt in einen Vektor zusammenfassen, den man den *Nabla-Operator* nennt.

Nabla-Operator

Der *Nabla-Operator* ∇ ist ein Vektor, dessen Komponenten die partiellen Ableitungen nach den Raumkoordinaten sind:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

Er ist zugleich Vektor und Differentialoperator, weshalb man bei seiner Anwendung sowohl die Regeln der Vektor- als auch jene der Differentialrechung beachten muss.

Mit seiner Hilfe können wir den Gradienten küzer schreiben als

$$\text{grad}\ \Phi = \nabla\Phi.$$

Dabei ist zu beachten, dass der Nabla-Operator wie jeder Differentialoperator definitionsgemäß auf alles wirkt, was rechts von ihm steht. Die Berechnung des Gradienten ist natürlich eine reine Übung in Differenzieren.

BEISPIEL: Nehmen wir etwa das Feld

$$\Phi\left(x, y, z\right) = x^2 + xyz - e^z.$$

Für die partiellen Ableitungen erhalten wir $\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 2x + yz$, $\frac{\partial\Phi}{\partial y} = xz$ und $\frac{\partial\Phi}{\partial z} = xy - e^z$. Der Gradient ist also in diesem Fall

$$\text{grad}\ \Phi = \left(2x + yz, xz, xy - e^z\right).$$

BEISPIEL: Ein in der Physik wichtiger Fall ist

$$\Phi\left(x, y, z\right) = \frac{\alpha}{r} = \frac{\alpha}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

denn mit $\alpha = GM$ wird dadurch das Gravitations-, mit $\alpha = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}$ das elektrostatische Potential beschrieben. Die partielle Ableitung nach einer Variable x_i (die Indexschreibweise ist hier vorteilhaft) ergibt:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\alpha\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^{-1/2} = -\alpha\frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^{-3/2} \cdot 2x_i = -\alpha\frac{x_i}{r^3}$$

Man erhält für den Gradienten also diesmal

$$\text{grad}\ \Phi = -\alpha\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{y}{r}\right) = -\alpha\frac{\vec{r}}{r^3}.$$

Nun können wir unseren Nabla-Operator aber natürlich nicht nur auf Skalar- sondern genausogut auch auf Vektorfelder wirken lassen. Dafür gibt es sogar zwei Möglichkeiten: Entweder wir bilden das Skalarprodukt $\nabla\cdot\boldsymbol{K}$ oder aber das vektorielle Produkt $\nabla \times \boldsymbol{K}$. Im ersten Fall erhalten wir die Divergenz:

DIVERGENZ

Die *Divergenz* div $\vec{K}$ eines Vektorfeldes $\vec{K}(\vec{r}) = (P(\vec{r}), Q(\vec{r}), R(\vec{r}))$ ist das Skalarprodukt des Nabla-Operators mit diesem Feld.

$$\text{div}\ \vec{K} = \nabla \cdot \vec{K} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Die Divergenz eines Vektorfeldes ist immer ein Skalarfeld.

Der zweite Fall liefert die Rotation (auch Rotor genannt):

Rotation

Die *Rotation* rot $\vec{K}$ eines Vektorfeldes $\vec{K}(\vec{r}) = (P(\vec{r}), Q(\vec{r}), R(\vec{r}))$ ist das Vektorprodukt des Nabla-Operators mit diesem Feld.

$$\operatorname{rot} \vec{K} = \nabla \times \vec{K} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

Die Rotation eines Vektorfeldes ist wieder ein Vektorfeld.

Welche Bedeutung haben nun diese anscheindend recht willkürlich eingeführten Größen? Zu einer anschaulichen Interpretation der Divergenz betrachten wir $\vec{K} = (P(x,y),\, Q(x,y)$ als Geschwindigkeitsfeld einer Flüssigkeit. Nun untersuchen wir einen kleinen Bereich mit den Abmessungen Δx und Δy am Ort (x, y). Nun fragen wir danach, wieviel Flüssigkeit diesen Bereich *netto* verläßt. Der Zufluss in x-Richtung ist negativ zu zählen, also $-P(x, y)\Delta y$, der Abfluss ist entsprechend $P(x + \Delta x, y)\Delta y$. Mit den analogen Ausdrücken für die y-Richtung erhält man für den Nettoabfluß

$$N = (P(x + \Delta x, y) - P(x, y))\, \Delta y + (Q(x, y + \Delta y) - Q(x, y))\, \Delta x$$

Nun beziehen wir diesen Fluss auf ein infintesimales Element mit der Ausdehnung $\Delta x \Delta y$ und erhalten

$$\frac{N}{\Delta x \Delta y} = \frac{P(x + \Delta x, y) - P(x, y)}{\Delta x} + \frac{Q(x, y + \Delta y) - Q(x, y)}{\Delta y}.$$

Nun bleibt nur noch ein Schritt zu tun, nämlich die ohnehin schon als klein angenommenen Größen Δx und Δy gegen Null gehen zu lassen, dadurch erhält man auf der linken Seite die Summe der partiellen Ableitungen. Den Nettofluß an einem Punkt ist

für die *Quelldichte*

Über die Bedeutung von Divergenz und Rotation werden wir uns in einem späteren Abschnitt noch ausführlich unterhalten, jetzt nur soviel: Die Divergenz wird sich als Quelldichte des Vektorfeldes erweisen, das heisst, sie gibt an, wieviel mehr aus einem Bereich ab- als zufließt.

Die Rotation hingegen wird sich als Wirbeldichte erweisen, ganz salopp sagt sie aus, wie sehr sich ein Vektorfeld „dreht“. Nehmen wir etwa das Feld

$$\boldsymbol{v} = \omega r \boldsymbol{e}_\varphi = (-\omega y,\, \omega x,\, 0),$$

das etwa die Geschwindigkeitsverteilung in einem rotierenden Zylinder beschreibt, so erhält man für die Rotation rot $\boldsymbol{v} = 2\omega \boldsymbol{e}_z$, also $|\operatorname{rot} \boldsymbol{v}| = 2\omega$. Die Rotation ist also direkt proportional der Winkelgeschwindigkeit einer Drehung.

Im Übrigen gibt es noch eine wichtige Möglichkeit, den Nabla-Operator auf ein Vektorfeld anzuwenden, nämlich den Vektorgradienten $\nabla \otimes \vec{K}$, der einen Tensor zweiter Stufe darstellt. Diese Größe wird üblicherweise in der Tensoranalysis genauer behandelt.

1.2.1 Zusammengesetzte Differentialoperatoren

Natürlich hat man auch die Möglichkeit, den Nabla-Operator *zweimal* anzuwenden, es muß nur auf sinnvolle Weise passieren, je nachdem, ob die erste Anwendung ein Skalar- oder ein Vektorfeld geliefert hat. Hat man etwa aus einem Feld Φ das Gradientenfeld grad Φ berechnte, so kann man von diesem die Divergenz oder die Rotation bilden. Auch bei einem Wirbelfeld $\boldsymbol{W} = \text{rot}\ \boldsymbol{A}$ ist so etwas mühelos möglich, und schließlich kann man noch den Gradienten der Divergenz eines Vektorfeldes bilden. (Dagegen hat div div $\boldsymbol{A}$ keinen Sinn, denn für ein Skalarfeld wie div $\boldsymbol{A}$ ist die Divergenz überhaupt nicht definiert.)

1.2.2 Das inverse Problem

Für ein beliebiges Vektorfeld $\boldsymbol{K}$, heisst $\boldsymbol{W} = \text{rot}\ \boldsymbol{K}$ dessen Wirbel- und $Q = \text{div}\ \boldsymbol{K}$ dessen Quellfeld.

1.3 Kurvenintegrale

1.3.1 Einleitung und Motivation

Bisher haben wir nur reellwertige Funktionen entlang von Intervallen aus $\mathbb{R}$ bzw. über Bereiche des $\mathbb{R}^n$ integriert. Für viele Zwecke ist es aber notwendig, dieses Konzept zu erweitern:

- Will man beispielsweise die Arbeit berechnen, die ein Kraftfeld an einem Körper leistet, der sich entlang einer bestimmten Bahn bewegt, muss man eine vektorwertige Funktion entlang einer Kurve integrieren können.

- Um die Gesamtladung einer geladenen Fläche zu bestimmen, wenn die Oberflächenladungsdichte gegeben ist, muss man eine Möglichkeit finden, als Integrationsbereich nur die interessierende Fläche zu wählen.

- Will man den Fluß etwa eines Strömungsfeldes durch eine Fläche bestimmen, muss man das Konzept des Oberflächenintegrals noch auf Vektorfunktionen ausdehnen.

In diesem Abschitt werden wir uns mit dem ersten dieser drei Themenbereiche beschäftigen, der nächste ist dann den restlichen beiden gewidmet.

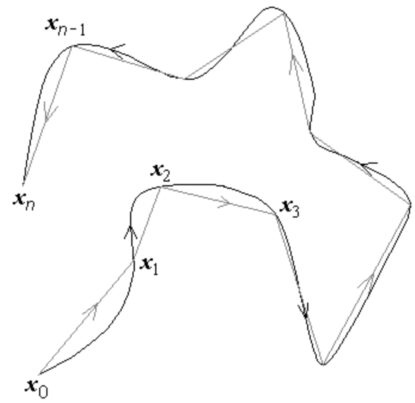
1.3.2 Definition

Zum besseren Verständnis der im folgenden definierten Begriffe ist möglicherweise ein kurzer Ausflug in die Physik hilfreich:

Die Arbeit die eine Kraft F an einem Massepunkt leistet, der sich einen Weg s in Richtung der Kraftwirkung bewegt, ist $W = F \cdot s$. Im Allgemeinen werden aber Kraft und Weg nicht parallel sein, und in diesem Fall kommt nur die *Projektion* der Kraft auf den Weg zum tragen. In Vektorschreibweise läßt sich das am besten über das Skalarprodukt ausdrücken: $W = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{s}$. Was tut man nun aber, wenn sich der Körper nicht mehr entlang einer Geraden bewegt und auch das Kraftfeld vom Ort abhängt.

Wenn, was wir annehmen wollen, sowohl Kurve als auch Vektorfeld „friedlich“ genug sind (also am besten gleich stetig differenzierbar) bietet sich natürlich eine Vorgehensweise an, die gesuchte Arbeit zumindest näherungsweise zu berechnen:

Dazu nähern wir die Kurve durch einen Polygonzug, also durch viele Geradenstücke an. Wenn diese klein genug sind, ist das Kraft- bzw. Vektorfeld an ihnen jeweils näherungsweise konstant, und man erhält als Abschätzung:



$$W \approx \sum_{i=0}^{n-1} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\chi}_i) \cdot (\boldsymbol{x}_{i+1} - \boldsymbol{x}_i),$$

wobei $\boldsymbol{\chi}_i$ irgendwo auf der Geraden zwischen $\boldsymbol{x}_i$ und $\boldsymbol{x}_{i+1}$ liegt. Mit Rückgriff auf die Parametrisierung $\boldsymbol{x}(t)$, $t \in [a, b]$ der Kurve kann man das auch umschreiben auf:

$$W \approx \sum_{i=0}^{n-1} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}(\tau_i) \cdot (\boldsymbol{x}(t_{i+1}) - \boldsymbol{x}(t_i))$$

$(a = t_0 < \tau_0 < t_1 < \tau_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < \tau_{n-1} < t_n = b)$
Diese Konstruktion erinnert bereits verdächtig an eine Riemannsche Summe, und so kommt nun, was wohl kommen muss: Im Grenzübergang zur unendlich feinen Unterteilung erhält man (im Falle stetiger Differenzierbarkeit von Vektorfeld und Kurve) das exakte Ergebnis. Aus der Summe wird dabei ein Integral, aus $\vec{F}(\vec{x}(\tau_i)$ einfach $\vec{F}(\vec{x}(t)$ und aus der Wegdifferenz $\vec{x}(t_{i+1}) - \vec{x}(t_i)$ mit ein wenig vektorieller Differentialrechnung und einer vernünftigen Anwendug des Mittelwertsatzes:

$$\vec{x}(t + dt) - \vec{x}(t) = \frac{\vec{x}(t + dt) - \vec{x}(t)}{dt}\, dt = \dot{\vec{x}}(t)\, dt.$$

Für das gesamte Kurvenintegral ergibt das also:

Kurvenintegral

Das Kurvenintegral entlang einer mit $\boldsymbol{x}(t)$, $t \in [a, b]$ parametrisierten Kurve C über ein Vektorfeld $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}) = (V_1(\boldsymbol{x}), \ldots, V_n(\boldsymbol{x}))$ ist definiert als:

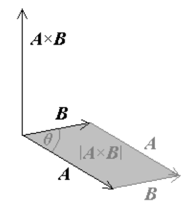
$$\begin{aligned} \int_C \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} \quad &\equiv \quad \int_C \{V_1\, \mathrm{d}x_1 + \ldots + V_n\, \mathrm{d}x_n \;:= \\ &= \quad \int_a^b \{V_1(\boldsymbol{x}(t))\, \dot{x}_1(t) + \ldots + V_n(\boldsymbol{x}(t))\, \dot{x}_n(t)\} \end{aligned}$$

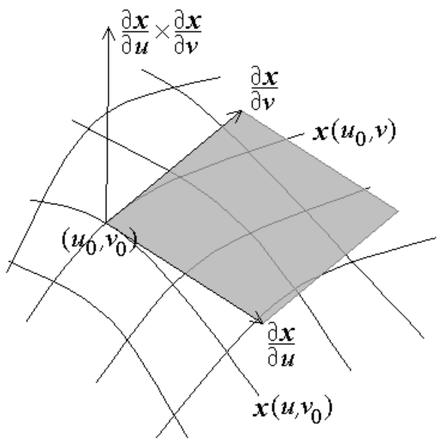
Man setzt für die praktische Rechnung also die Parametrisierung $(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ der Kurve in das Vektorfeld $(V_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, V_n(x_1, \ldots, x_n))$ ein, ermittelt die jeweiligen Differentiale gemäß $\mathrm{d}x_i = \dot{x}_i\, dt$ und integriert die so erhaltene Funktion des Parameters t von a nach b. Das funktioniert natürlich nur dort, wo die Kurve stetig differenzierbar ist. Besteht C nur aus mehreren derartig Stücken, die aber auf nicht differenzierbare Weise zusammengesetzt wurden, so muss man das Integral für jedes Stück seperat berechnen und erhält das gesamte Integral als Summe der Einzelintegrale.

1.4 Flächenintegrale

Das nächste Problem, das wir behandeln wollen, ist die Integration über Flächen $\mathcal{F}$, die natürlich allgemein mittels $\boldsymbol{x}(u,v)$ mit $(u,\, v) \in B$ dargestellt werden.

Als ersten Schritt untersuchen wir nun den Inhalt einer solchen Fläche, und wie gewohnt werden wir ihn auf eine Integration über einfachere, dafür aber infinitesimal kleine Strukturen zurückführen. Dazu erinnern wir zunächst, daran, dass der Flächinhalt eines Parallelogramms, das von den Vektoren $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ aufgespannt wird, durch $|\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}| = AB \sin\vartheta$ gegeben ist.





Nun können wir in jedem Punkt der Fläche die beiden Tangentenvektoren

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial v}$$

an die Kurven $\boldsymbol{x}(u, v_0)$ und $\boldsymbol{x}(u_0, v)$ bilden. Diese beiden Vektoren müssen nach den Bedingungen, die wir an eine Fläche stellen, linear unabhängig sein, spannen also ein Parallelogramm auf. Überdecken wir nun die Fläche mit vielen kleinen Parallelogrammen an Punkten $\boldsymbol{x}_{mn} = \boldsymbol{x}(u_0 + m\,\Delta u, v_0 + n\,\Delta v)$, so liefert jedes Parallelogramm einen Beitrag

$$\Delta A_{mn} = \left|\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial v}\right|_{\boldsymbol{x}_{mn}} \Delta u\,\Delta v$$

und für den Flächeninhalt erhält man den Schätzwert $A = \sum_{mn} \Delta A_{mn}$. Geht man nun zu Differentialen $\mathrm{d}u$, $\mathrm{d}v$ über, so wird die obige Näherung für den Flächeninhalt exakt und man erhält für den Flächeninhalt (bzw. das *Maß* μ) von $\mathcal{F}$:

$$A_{\mathcal{F}} = \mu(\mathcal{F}) = \int_{\mathcal{F}} d\sigma := \iint_B \left|\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial v}\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

Dabei nennt man $\mathrm{d}\sigma = \left|\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial v}\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$ das *skalare Oberflächenelement* (σ erinnert dabei an das „s“ im engl./franz. *surface*). Nun verallgemeinern wir diese Formel, zunächst auf skalare Funktionen: Ist also $\mathcal{F}$ eine durch $\boldsymbol{x}(u,v)$ mit $(u,\, v) \in B$ parametrisierte Fläche, so wird das Oberflächenintegral der Funktion $G(x,\, y,\, z)$ über $\mathcal{F}$ definiert durch:

$$\boxed{I = \int_{\mathcal{F}} G(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\sigma = \iint_B G(\boldsymbol{x}(u,v)) \left|\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial v}\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v}$$

(Für eine genauere Herleitung überdeckt man wieder die Fläche mit Parallelogrammen, nimmt auf jedem Parallelogramm einen konstanten Funktionswert $G(\xi, \eta, \zeta)$ im Sinne Riemannscher Summen an und läßt die Unterteilung im Grenzübergang unendlich fein werden.)

Ist die Fläche $\mathcal{F}$ über einem Bereich $S \subset \mathbb{R}^2$ explizit durch $z(x,y)$ gegeben, erhält man für den Betrag des Kreuzprodukts der Tangentialvektoren:

$$\left|\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial y}\right| = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ z_x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ z_y \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -z_x \\ -z_y \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2},$$

und mit $\mathrm{d}\sigma = \left|\boldsymbol{x}_x \times \boldsymbol{x}_y\right|$ vereinfacht sich die Formel für das Oberflächenintegral über eine Funktion $G(x,\,y,\,z)$ zu

$$I = \int_F G(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\sigma = \iint_S G\left(x,\,y,\,z(x,y)\right)\,\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\;\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Für eine derartige Fläche $z(x,\,y)$ kann man entsprechend auch sofort den normierten Normalvektor angeben, nämlich

$$\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} \begin{pmatrix} z_x \\ z_y \\ -1 \end{pmatrix}$$

oder für umgekehrte Orientierung $\boldsymbol{n}' = (1 + z_x^2 + z_y^2)^{-1/2}(-z_x,\,-z_y,\,1)$.

Beispiel: Wir bestimmen das Integral von $G(x,y,z) = z^2$ über die obere Halbkugelfläche $\mathcal{F}$ mit Radius R. Diese wird parametrisiert mittels

$$\boldsymbol{x}(\vartheta,\,\varphi) = (R\,\sin\vartheta\cos\varphi,\,R\,\sin\vartheta\sin\varphi,\,R\,\cos\vartheta)$$

mit $(\vartheta,\,\varphi) \in [0,\,\frac{\pi}{2}] \times [0,\,2\pi]$. Nun ergibt sich

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} R\,\cos\vartheta\cos\varphi \\ R\,\cos\vartheta\sin\varphi \\ -R\,\sin\vartheta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -R\,\sin\vartheta\sin\varphi \\ R\,\sin\vartheta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^2\sin^2\vartheta\cos\varphi \\ R^2\sin^2\vartheta\sin\varphi \\ R^2\sin\vartheta\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

Damit erhält man für das skalare Oberflächenelement

$$\mathrm{d}\sigma = \sqrt{R^4\sin^4\vartheta\cos^2\varphi + R^4\sin^4\vartheta\sin^2\varphi + R^4\sin^2\vartheta\cos^2\vartheta}\;\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi = R^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi$$

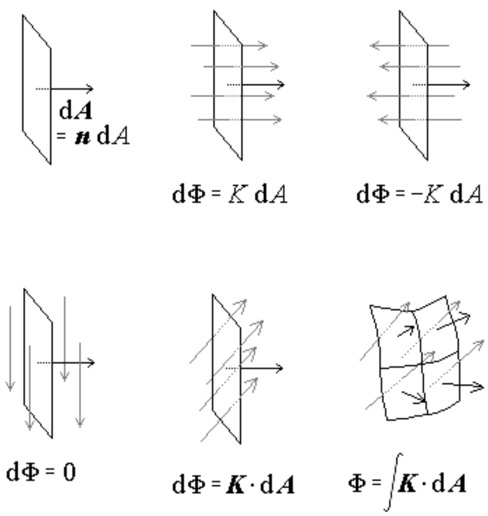
und für das Integral:

$$\begin{aligned} \iint_F z^2\,\mathrm{d}\sigma &= \iint_{[0,\,\frac{\pi}{2}]\times[0,\,2\pi]} (R\cos\vartheta)^2\,R^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi = \\ &= R^4\int_{\varphi=0}^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\cdot\int_{\vartheta=0}^{\pi/2}\cos^2\vartheta\,\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta = -2\pi R^4\left.\frac{\cos^3\vartheta}{3}\right|_{\vartheta=0}^{\pi/2} = \frac{2\pi R^4}{3} \end{aligned}$$

Der Fluss durch eine Fläche

Bei Oberflächenintegralen ist neben dem Fall einer skalaren Funktion natürlich auch jener einer vektoriellen von großer Bedeutung – vor allem für die schon angesprochene Bestimmung des Flusses durch eine Fläche. Ähnlich wie beim Kurvenintegral hängt hier fast alles von der Orientierung des Vektorfeldes ab:

Um das vernünftig zu beschreiben, wird für eine infinitesimale Fläche mit Einheitsnormalvektor $\boldsymbol{n}$ und Inhalt $\mathrm{d}A$ der Vektor $\mathrm{d}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}A$ definiert. Ist nun das Vektorfeld $\boldsymbol{K}$ parallel zu $\mathrm{d}\boldsymbol{A}$, so ist der Fluss von $\vec{K}$ durch die Fläche genau $d\Phi = K\,\mathrm{d}A$, im antiparallelen Fall $d\Phi = -K\,dA$. Falls das Vektorfeld parallel zur Fläche und damit orthogonal zu $\vec{n}$ ist, ist der Fluss Null. Ganz allgemein wird der Fluss durch das Skalarprodukt angegeben und es ist $\mathrm{d}\Phi = \boldsymbol{K}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A}$. Nun setzen wir die komplette Fläche wie gehabt aus infintesimalen Flächen zusammen und erhalten für den Gesamtfluss



$$\Phi = \int_{\mathcal{F}} \boldsymbol{K}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A} = \int_{\mathcal{F}} (\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}\sigma = \iint_B \boldsymbol{K}\cdot\left(\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial v}\right)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

Dabei nennt man $\mathrm{d}\boldsymbol{A} = \frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial v}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$ das *vektorielle Oberflächenelement* (für das naheliegenderweise auch die Schreibweise $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ gebräuchlich ist).

Für Oberflächenintegrale gibt es eine zweite, häufig verwendete und recht eingängige Schreibweise, die in gewissem Ausmaß den Übergang zur moderen Differentialgeometrie erleichtert. Dazu nehmen wir wieder die Fläche, über die wir integrieren wollen und die wir als $\boldsymbol{x}(u,\,v) = (x(u,v),\,y(u,v),\,z(u,v))$ mit $(u,\,v)\in B$ parametrisiert voraussetzen. Nun definieren wir

$$\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z := \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \qquad \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x := \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix} \qquad \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y := \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

und wegen (wie man durch Nachrechnen leicht überprüfen kann)

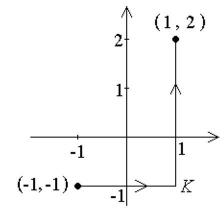
$$\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial v} = \mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z\;\boldsymbol{e}_x + \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x\;\boldsymbol{e}_y + \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\;\boldsymbol{e}_z$$

kann man ein Oberflächenintegral über $\boldsymbol{V} = (V_1, V_2, V_3)$ damit auch schreiben als

$$\Phi = \iint_{\mathcal{F}} \Big\{V_1(x,y,z)\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + V_2(x,y,z)\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + V_3(x,y,z)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\Big\}$$

Die Schreibweise $\wedge$ ist aus der Theorie der Differentialformen entlehnt und deutet ein antikommutatives Produkt an, weil $\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_j = -\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_i$ ist.

1.5 Gelöste Musterbeispiele



Man berechne den Wert des Kurvenintegrals

$$I = \int_K \left\{(2xy + y^2)dx + (2xy + x^2)dy\right\}$$

für die in nebenstehender Skizze gegebene Kurve K.

Es ist $V_1(x, y) = 2xy+y^2$ und $V_2(x, y) = 2xy+x^2$. Nun gilt $V_{1,y} = 2x+2y = V_{2,x}$, daher besitzt $\boldsymbol{V} = (V_1, V_2)$ ein Potential Φ, für das gilt: $\Phi_x = V_1$ und $\Phi_y = V_2$. Integration liefert nun: $\Phi = \int V_1\, dx = x^2y + xy^2 + w_1(y)$ und $\Phi = \int V_2\, dy = x^2y + xy^2 + w_2(x)$. Auf jeden Fall ist also $\Phi(x, y) = x^2y + xy^2$ ein Potential, und das Integral liefert $I = \Phi(1, 2) - \Phi(-1, -1) = (2 + 4) - (-1 - 1) = 8$.
Ebenso könnte man das Integral natürlich ohne Potential direkt berechnen (zuerst $(x, y) = (t, -1)$, $t \in [-1, 1]$, $dx = dt$, $dy = 0$, dann $(x, y) = (1, t)$, $t \in [-1, 2]$, $dy = dt$, $dx = 0$):

$$I = \int_{-1}^{1} (-2t + 1)\, dt + \int_{-1}^{2} (2t + 1)\, dt = \Big[-t^2 + t\Big]_{-1}^{1} + \Big[t^2 + t\Big]_{-1}^{2} = 2 + 6 = 8$$

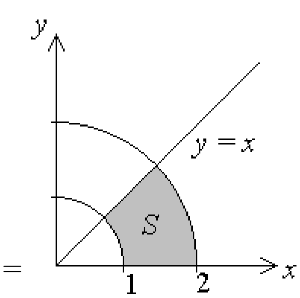
$S \subset \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$S := \left\{(x, y)\middle| x \geq 0,\ 0 \leq y \leq x,\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\right\}$$

Über S sei durch $z(x, y) = x^2 + y^2$ explizit eine Fläche F gegeben. Man skizziere die Menge S und berechne das Oberflächenintegral $I = \int_F G\, dA$ mit $G(x, y, z) = \arctan \frac{y}{x}$.

Zur Berechnung des Oberflächenelements braucht man $z_x = \frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = 2x$ und $z_y = \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = 2y$. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
I &= \iint_S G(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \\
&= \int_{r=1}^{2} \int_{\varphi=0}^{\pi/4} \underbrace{\arctan \frac{r\, \sin\varphi}{r\, \cos\varphi}}_{\arctan(\tan\varphi)=\varphi} \cdot \sqrt{1 + 4r^2} \cdot r\, dr\, d\varphi = \\
&= \int_{\varphi=0}^{\pi/4} \varphi\, d\varphi \cdot \int_{r=1}^{2} r\, \sqrt{1 + 4r^2}\, dr = \\
&= \left| \begin{array}{ll} u = 1 + 4r^2 & 2 \to 17 \\ du = 8r\, dr & 1 \to 5 \end{array} \right| = \frac{\varphi^2}{2}\bigg|_0^{\pi/4} \cdot \int_{u=5}^{17} \frac{1}{8} u^{1/2}\, du = \\
&= \frac{\pi^2}{12 \cdot 32} u^{3/2}\bigg|_5^{17} = \frac{\pi^2}{384} \cdot (17^{3/2} - 5^{3/2})
\end{aligned}$$

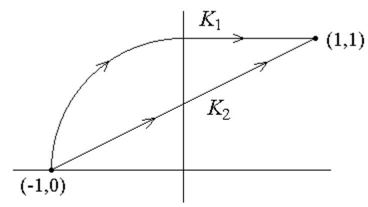


K_1, K_2 sind die rechts dargestellten Kurven im $\mathbb{R}^2$ mit Anfangspunkt $(-1,0)$ und Endpunkt $(1,1)$. Für die Vektorfelder

a) $\vec{V}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, *b)* $\vec{V}(x,y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$,

c) $\vec{V}(x,y) = \begin{pmatrix} e^{\pi x}\cos(\pi y) \\ -e^{\pi x}\sin(\pi y) \end{pmatrix}$

berechne man die Integrale $\displaystyle\int_{K_i} \{V_1\,dx + V_2\,dy\}$.



1. Untersuchung der Integrabilitätsbedingungen: $\frac{\partial V_1}{\partial y} = 0 = \frac{\partial V_2}{\partial x}$, also existiert ein Potential $\varphi(x,y)$, für das gilt: $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = V_1 = x$ und $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = V_2 = y$, z.B. $\varphi(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$. Damit ist

$$\int_{K_i} \{V_1\,dx + V_2\,dy\} = \varphi(1,1) - \varphi(-1,0) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

2. Wegen $\frac{\partial V_1}{\partial y} = -1$ und $\frac{\partial V_2}{\partial x} = 1$ gibt es kein Potential. Daher muss man die Kurven parametrisieren

$$\begin{array}{llllll} K_1: & i) & \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix} & t \in [0, \frac{\pi}{2}] & \dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \\ & ii) & \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} & t \in [0,1] & \dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ K_2: & & \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} -1+2t \\ t \end{pmatrix} & t \in [0,1] & \dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

und erhält für die Integrale:

$$\begin{aligned} \int_{K_1} \{-y\,dx + x\,dy\} &= \int_0^{\pi/2} \{-\sin^2 t - \cos^2 t\}dt + \int_0^1 (-1)\,dt = \\ &= -\int_0^{\pi/2} dt - \int_0^1 dt = -\left(1 + \frac{\pi}{2}\right) \\ \int_{K_2} \{-y\,dx + x\,dy\} &= \int_0^1 \{-t \cdot 2 + (-1+2t)\}dt = -\int_0^1 dt = -1 \end{aligned}$$

3. Hier gilt wieder

$$\frac{\partial V_1}{\partial y} = -\pi e^{\pi x}\sin(\pi y) = \frac{\partial V_2}{\partial x},$$

es gibt also ein Potential $\varphi(x,y)$, z.B. $\varphi(x,y) = \frac{1}{\pi}e^{\pi x}\cos(\pi y)$. Damit ist:

$$\int_{K_i} \{V_1\,dx + V_2\,dy\} = \varphi(1,1) - \varphi(-1,0) = \frac{1}{\pi}e^{\pi}\cos(\pi) - \frac{1}{\pi}e^{-\pi}\cos(0) = -\frac{e^{\pi} + e^{-\pi}}{\pi}$$

Man untersuche, ob das Kurvenintegral

$$L = \int_{C:A\to B} \{2x_1\, dx_1 + x_3\, dx_2 + (x_2 + x_4)dx_3 + x_3\, dx_4\}$$

mit $A(0,0,0,0)$, $B(1,1,0,1)$ vom Weg unabhängig ist und berechne L für den Fall, dass C die geradlinige Verbindung von A nach B ist.

Untersuchung der Integrabilitätsbedingungen: $\frac{\partial V_2}{\partial x_3} = 1 = \frac{\partial V_3}{\partial x_2}$, $\frac{\partial V_3}{\partial x_4} = 1 = \frac{\partial V_4}{\partial x_3}$, alle anderen sind trivial erfüllt. Berechnung von L entweder über Potential (z.B. $\Phi = x_1^2 + x_2x_3 + x_3x_4$) oder schneller mit $\boldsymbol{x}(t) = (t,t,0,t)$, $t \in [0,1]$: $L = \int_0^1 2t\, dt = 1$

Man zeige, dass das Kurvenintegral

$$I = \int_C \left\{\pi x e^{\pi w}\, dw + e^{\pi w}\, dx + z^2\, dy + 2yz\, dz\right\}$$

vom Weg unabhängig ist und berechne seinen Wert für den Weg $A(1,1,1,1) \to E(1,-1,2,0)$.

Es ist

$$\frac{\partial V_w}{\partial x} = \pi e^{\pi w} = \frac{\partial V_x}{\partial w} \qquad \frac{\partial V_y}{\partial z} = 2z = \frac{\partial V_z}{\partial y},$$

alle anderen Ableitungen sind klarerweise Null. Ein Potential ist $\varphi(w,x,y,z) = xe^{\pi w} + yz^2$ und für das Integral ergibt sich: $I = \varphi(1,-1,2,0) - \varphi(1,1,1,1) = -(2e^{\pi} + 1)$.

1.6 Aufgaben, Fragen, Ergänzungen

1.6.1 Übungsaufgaben

1. Für das Vektorfeld $\vec{V} = (yz^3, xz^3, 3xyz^2)$ berechne man rot $\vec{V}$, div $\vec{V}$, grad div $\vec{V}$, gebenenfalls ein Potential $\phi(x,y,z)$ und das Kurvenintegral

$$I = \int_C \{yz^3\, dx + xz^3\, dy + 4xyz^2\, dz\},$$

   wobei C den Anfangspunkt $(0,0,0)$ geradlinig mit dem Endpunkt $(1,2,3)$ verbindet.

2. Man überprüfe, ob das Kurvenintegral

$$I = \int_C \{(e^y - ze^x)\, dx + xe^y\, dy - e^x\, dz\}$$

   vom Weg unabhängig ist und berechne I für den Fall, dass C das Geradenstück von $(1,1,1)$ nach $(2,3,4)$ ist.

3. Man berechne die beiden Kurvenintegrale

$$I_i = \int_{C_i} \left\{ (x^2 + y^2)\, dx + e^y\, dy \right\}$$

wobei C_1 den Anfangspunkt $A(1,0)$ mit dem Enpunkt $B(0,1)$ in einem Viertelkreis verbindet, C_2 in gerader Linie.

4. Man zeige, dass das Kurvenintegral

$$\int_C \sin\left\{ x_2\, e^{x_1 \,\sin x_2}\, dx_1 + x_1\, \cos x_2\, e^{x_1\, \sin x_2}\, dx_2 + x_4^2\, dx_3 + 2x_3x_4 \right\}$$

vom Weg unabhängig ist und bestimme ein Potential des Vektorfeldes.

5. Man berechne den Oberflächeninhalt der Fläche F mit Parametrisierung

$$\vec{x}(u,v) = \begin{pmatrix} \sin^2 u\, \cos v \\ \sin^2 u\, \sin v \\ \sin u\, \cos u \end{pmatrix} \qquad u \in [0,\pi],\; v \in [0, 2\pi]$$

6. Man berechne das Oberflächenintegral $\int_F G\, d\sigma$ der Funktion

$$G(x,y,z) = \frac{yz}{\sqrt{1+x}}$$

über der Fläche

$$F = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 0 \le x \le 2,\; 0 \le y \le 2\sqrt{x},\; z = \sqrt{4x - y^2} \right\}$$

7. Durch $z(x,y) = y^2$ sei über der Menge

$$S = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \le x \le 2,\, 0 \le y \le \sqrt{x} \right\}$$

eine Fläche F gegeben. Man berechne den Wert des Oberflächenintegrals $\int_F y\, d\sigma$.

8. K sei jene Kurve, die den Anfangspunkt $P_A(0,0)$ zuerst geradlinig mit $(1,0)$ und diesen Punkt geradlining mit dem Endpunkt $P_E(0, \frac{\pi}{2})$ verbindet. Für diese Kurve berechne man das Kurvenintegral

$$\int_K \{ 2\cos(xy)\sin(xy)\, dx - 2\cos(xy)\sin(xy)\, dy \}\,.$$

Weiters stelle man fest, ob das Vektorfeld ein Potential besitzt.